

Kétfázisú Modell – Publikációs Változat

Zimmermann József villamosmérnök, informatika tanár
független kutató
email: bcs.zimmermann@gmail.com

Absztrakt

Ebben a leiratban egy kétfázisú, emergens tér-idő modellt mutatok be, amelyben a klasszikus értelemben vett geometria nem kezdeti feltételként, hanem dinamikus folyamat eredményeként jelenik meg. A modell az Univerzum előtti, úgynevezett *pregeometriai fázisban* skalár jellegű energiamezők időbeli oszcillációiból indul ki. E rezonáns mezők kölcsönhatásából jön létre egy lokális kvantumvákuum-instabilitás, amely „alagútszerű” struktúrát formál. Ez az objektum a féregjáratok egy nem-hagyományos, mezőelméleti általánosítása. Amennyiben az energiakonfiguráció eléri a kritikus küszöböt, kialakul egy tartós, önfenntartó topológiai szerkezet, amelyből emergens módon létrejön a tér-idő, a metrika és a standard mezők. A második fázisban a rendszer már a geometriai dinamikát követi, beleértve a skalár-, spinor- és gauge-mezők evolúcióját. A cikk célja a két fázis világos elkülönítése, fizikai értelmezése és a teljes modell koncepcionális keretének bemutatása.

Bevezetés

A világegyetem korai szakaszának leírása napjaink elméleti fizikájának egyik legösszetettebb és legnyitottabb kérdésköre. A standard kozmológiai modell – minden sikeressége ellenére – nem ad teljes képet arról, hogyan keletkezett maga a téridő, milyen fizikai törvények érvényesültek a Planck-korszakban, és hogyan ment végbe a **pregeometriai** (téridő előtti) állapotból a klasszikus, metrikus geometria kialakulása. A jelenlegi elméleti keretekben több, egymással részben kompatibilis, részben konkuráló irányzat létezik: a hurok-kvantumgravitáció, a húrelméleti szcenáriók, a kauzális dinamika triangulációi, a szimpliciális kvantumgravitáció, vagy épp az emergens téridő-modellek. Ezek közös sajátossága, hogy a klasszikus téridő nem elemi fogalom, hanem **emergens**, nagy léptékű kollektív viselkedés.

A jelen tanulmány egy olyan elméleti keretet fejleszt tovább, amelyben a téridő **nem fundamentális objektum**, hanem alacsony energiás, effektív leírása egy mélyebb szerkezetű pregeometriai meződinamikának. A modell kiindulópontja egy több mezőt tartalmazó akció, amelyben szerepelnek skalár-, spinor-, vektor- és topológikus mezők, valamint külön feltételezzük bizonyos geometriai „proxy” -struktúrák megjelenését. E proxyk olyan háttérfüggvények vagy operátorok, amelyek a klasszikus geometriai mennyiségek (például metrika, csatolások, csomagolt görbületi invariánsok) korai fázisbéli előképei.

A munka fő újdonsága a következő:

- **Egy olyan pregeometriai akció felírása**, amelyből a klasszikus geometriai fázisba való átmenet nem posztulált, hanem **dinamikusan levezetett** folyamat.
- **Rezonancia-vezérelt throat-képződés**, amely a topológikus Chern–Simons-áramok és a skalármezők kölcsönhatása révén féregjáratszerű csatornák kialakulásához vezethet.

- **Coarse-graining alapú emergens geometria**, amely a mikroszkopikus pregeometriai szabadságfokok integrálása után egy effektív metrika szerkezetet eredményez.
- **Egy teljes, 11 komponensből álló effektív Lagrange-sűrűség**, amely explicit módon tartalmazza a kinetikus, potenciál-, topológikus, elektromágneses és spinor eredetű hozzájárulásokat.
- **Részletes Euler–Lagrange-egyenletek**, energia–impulzustenzor, valamint konzervációs törvények levezetése.

A tanulmány célja tehát kettős: egyrészt kiépíteni azt a matematikai modellt, amely a pregeometriai fázisból a geometriai téridő megjelenését vezeti le, másrészt bemutatni a modell fizikai következményeit — különös tekintettel a féregjárat-típusú szerkezetek, a tömegkeletkezés és az esetleges megfigyelhető nyomok (statisztikus anizotrópiák, spektroszkópiai eltérések, topológikus maradványok) vizsgálatára.

A következő fejezetekben részletesen tárgyaljuk a pregeometriai akció tulajdonságait, a bázismegoldásokat, a rezonancia-folyamatot, a Coarse-graining eljárást, majd a geometriai fázis explicit felírását és egyenleteit. A tanulmány a fizikai interpretációval és az esetleges kísérleti/megfigyelési implikációk összegzésével zárul szimulációs program keretében.

A tér-idő emergens keletkezésének modelljei egyre meghatározóbb szerepet játszanak a kvantumgravitáció kutatásában. A legtöbb megközelítés – mint a hurok-quantumgravitáció, a kauzális halmazok elmélete, az entanglement-geometria program vagy az emergens holografikus képek – közös feltételezése, hogy a tér-idő, mint folytonos, differenciálható sokaság, nem fundamentális. Az ismertetett modell ehhez az irányhoz kapcsolódik, de sajátos módon: **a tér-idő a kvantumvákuum rezonáns instabilitásából jelenik meg**, amely egy olyan mezőelméleti objektumot hoz létre, amelynek nincs még geometriai interpretációja, de idő kezdete és fejlődése már definiált.

A cikk szerkezetét tekintve két fő fázist különít el:

1. **Pregeometriai fázis**: nincs tér, nincs metrika, csak idő és skalármennyiségek. A mezők kölcsönhatása nem-geometriai dinamikát ír le. E fázis során egy rezonáns instabilitás hozza létre a „kvantum-alagutat”, amelynek nincs klasszikus topológiája, de szerepe hasonló egy nem-triviális struktúráéhoz.
2. **Geometriai fázis**: a rendszer átlép egy kritikus határértéket, amelynek következtében a mezők konfigurációja faktorizálható egy differenciálható sokaságra. Ekkortól kezdve értelmezhető a tér-idő metrika, a skalármezők, spinorok és gauge-mezők dinamikája, valamint az általunk eredetileg megadott Lagrange-sűrűség.

A cél e két fázis elméleti és fizikailag intuitív bemutatása, valamint a fázisátmenet folyamatának koncepcionális értelmezése.

1. A pregeometriai fázis

A világegyetem keletkezésének vizsgálatakor a legtöbb klasszikus és kvantumgravitációs modell azt feltételezi, hogy a téridő mint geometriai entitás már a kezdeti pillanatokban is definiált. A jelen publikáció egyik alapvető kiindulópontja azonban az, hogy létezhet egy olyan „pregeometriai” fázis, amelyben maga a téridő metrikus szerkezete még nem alakult ki. Ebben a fázisban az alapvető objektumok nem tenzoros mennyiségek, hanem skaláris energiahordozók, frekvenciakomponensek és rezgésmintázatok. A téridő — és ezáltal a geometria — csak később, emergensen jelenik meg.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a pregeometriai akció explicit formáját, értelmezzük annak fizikai tartalmát, és felvázoljuk azokat a mechanizmusokat, amelyek később a geometria megjelenéséhez vezetnek. A fázisban feltételezzük, hogy a tér-idő még nincs jelen. Az elmélet alapja, két skalármező konfigurációja a geometriai tér-idő megjelenése előtti állapotban van, amit nevezünk pregeometriai fázisnak. A Φ kvantum vákuum belső energiafluktuációja létrehoz egy járatot, a két skalármező kölcsönhatása eredményezi a változást. A járatban létrejött változás kialakít egy X ősentitást. A rendszer kizárólag **skalárértékű mennyiségeket** feltételez.

A modell ötlete az energia- tömeg fázisátmenetének keresése, törvényességi alapok megállapítása. A kvantumvákuum fluktuáció mező konfigurációja a pregeometriai térben létrehoz egy alagutat vagy járatot.

- $\Phi(s)$ – **kvantumvákuum rezonancia**: a vákuum lokális oszcillációjának, kondenzátumának skalár-rendje. Ez alakítja a „járatot” (a throat-ot) mint topológikus/lokalizált szerkezetet.
- $X(s)$ – a **foton + spinor összetett energiamezőjének skaláris reprezentánsa**: pl. a fermion-bilineár $\bar{\psi}\psi$ és fotonenergia sűrítmenyének skaláris kombinációja.

A pregeometriai fázis leírásához paramétervonalat $s \in \mathbb{R}$ használtam, ez nem időbeni sorba rendezés, hanem konfigurációs rendezésre szolgál, pl. egy emergens irány. Az akció egyenlete:

$$S[\Phi, X] = \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathcal{L}(\Phi, X, \Phi', X')$$

ahol az egyenletben $a' \equiv d/ds$ jelent. A Lagrange- formula legyen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}(X')^2 - V(\Phi, X) - \kappa X\Phi' - \mu X\Phi$$

Magyarázat:

$\frac{1}{2}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}(X')^2$	a konfigurációs „kinetikus” görbület a paraméter mentén (energia a változásért).
$V(\Phi, X)$	a potenciál, amely tartalmazza a vákuum stabilitását és a lokális csapdát (throat).
$\kappa X\Phi'$	„gyenge non-reciprocal” kötést ad, ami energiahullám jellegű átvitelre enged lehetőséget (dispersiv coupling)

$\mu X \Phi$

statikus kölcsönhatás: a X mező lokálisan „megváltoztatja” a vákuum szimmetriáját, vagy fordítva.

1. Egy konkrét potenciálpélda

Egy egyszerű, de sokat tudó választás:

$$V(\Phi, X) = \lambda(\Phi^2 - v^2)^2 + \frac{1}{2}m_\chi^2 X^2 + \frac{1}{4}\beta X^4 + \gamma\Phi X^2$$

λ, v a vákuum kettős minima (symmetry-breaking) paraméterei: Φ képes lokális kitüremkedésre (kink / bubble).

m_χ, β a stabilizáló tömeg- és önkölcsönhatás a X számára.

γ ha negatív, Φ lokális kitérése csökkenti m_χ -t, így a X könnyen kötődik a throat-hoz ($\rightarrow$ foton + spinor lokális csapdája).

2. Euler-Lagrange egyenletek

Az akció variációja adja a mozgásegyenleteket

$$\begin{aligned}\Phi'' + \kappa X + \frac{\partial V}{\partial \Phi} &= 0 \\ X'' - \kappa \Phi' - \mu \Phi + \frac{\partial V}{\partial X} &= 0\end{aligned}$$

3. A féregjárat (throat) mint lokális megoldás.

- A throat olyan *lokalizált* megoldás, ahol $\Phi(s)$ átmegy egyik minimum közeléből egy kiemelkedésbe (pl. a kink/bubble középvonalán), és $X(s)$ lokálisan megnövekszik (kötött állapot).
- Matematikailag keresünk *véges energiájú* (finite action) megoldást, amely aszimptotikusan állandó: $\Phi(\pm\infty) = \pm v, X(\pm\infty) = 0$.
- Tipikus megoldás: kink-profil $\Phi(s) \approx v \tanh(\sqrt{2\lambda}vs)$ módosítva a γ -kölcsönhatás miatt; $X(s)$ akkor lesz lokalizált, ha a lokális effektív tömeg-négyzet $m_\chi^2 + 2\gamma\Phi(s)$ egy sávban negatív/kisebb értéket vesz fel $\rightarrow$ bound state.

4. Tunneling / instanton perspektíva (a féregjárat létrejötte)

- Ha a throat kialakulása energetikailag fölötte van a triviális vákuumnak, akkor a létrejövetel egy tunelálási esemény: a Lorentz-nem létezése miatt használók Euklideszi paramétert $s \mapsto \tau$ és keressük a „bounce” -megoldást, ami minimális akciót ad.
- A tunelálási amplitúdó aránylag $\sim \exp(-S_E[\text{bounce}]/\hbar)$, ahol S_E az Euclidean akció (kicserélni $(\Phi')^2 \rightarrow (\dot{\Phi})^2$ stb.). A kölcsönhatások (γ, μ, κ) módosítják a bounce-profil és így az esélyt.

5. A foton és a spinor mozgása a járatban

Mivel a X skalárként szerepel, a kismértékű excitációk a háttér $\Phi_0(s), X_0(s)$ körül lineárizálva egy Schrödinger-szerű hullámegyenletet adnak:

$$\delta X''(s) + \mathcal{U}_X(s)\delta X(s) = 0$$

ahol az effektív potenciál

$$\mathcal{U}_X(s) = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} |_{\Phi_0, X_0} + \text{dispersive terms}$$

Ha $\mathcal{U}_X$ egy jó lokalizált potenciálverem, akkor diszkrét kötött állapotok (a járat „modusai”) és folytonos spektrum is lesz — ez modellezi, hogy a foton + spinor energiamező „szabadon mozog” a járatban: kötések mentén elnyelt modulusok és vezető modulusok.

A spinori természetet a modulban így tudjuk megőrizni: a mikro-szintű spinor mező ψ -ből felépülő $X \equiv \bar{\psi}\psi$ mint fő mérhető skalárt; a spinori dinamikát ugyanakkor külön jobb leírni, ha szükséges, mint háttérben lineáris Dirac-egyensúlyok, de ezek vektor/Dirac struktúrát igényelnének — ha ragaszkodva a „nincs tér-idő, csak skalárok” feltételhez, akkor a bilineáris proxy a legbiztonságosabb.

6. Stabilitás és paraméter

A throat stabilitása attól függ, hogy a második variációs operátor pozitív-e a háttérmegoldás körül. Konkrétan vizsgálni kell a kis-ingadozás spektrumát az operátoron

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{ds^2} \begin{pmatrix} \partial_{\Phi\Phi}^2 V & \partial_{\Phi X}^2 V \\ \partial_{X\Phi}^2 V & \partial_{XX}^2 V \end{pmatrix}_{\Phi_0 X_0}$$

Ha negatív modulus létezik $\rightarrow$ instabil vagy tunelálási az irány.

7. Numerikus vizsgálati recept, ami most elindítható

- Paraméter választás $v = 1, \lambda = 1, m_X^2 = 1, \beta = 1, \gamma = -0.5, \kappa = 0.1, X(\pm\infty) = 0$
- Határérték-probléma megoldása kétirányú integrálással (shooting):

$$\Phi(\pm\infty) = \pm v, X(\pm\infty) = 0$$
- Az akciót S , és az ingadozási spektrum számolása (diszkrét egyenértékek)
- Változtatva γ -t — ha elég negatív, a X kötött állapot megjelenik a throat-ban.
- A bounce-megoldás keresése Euklideszi térben (tunelálási akció).

Javaslat a megoldáshoz a Python/Matlab eszköz.

8. Következtetés az 1. pregeometriai fázis skalár mezőiből.

A rezgő vákuum állapotváltozása időfüggő, ezért *megjelenik az idő*, így elmondható, hogy az idő emergens paraméter. Ha az $\Phi(s), X(s)$ periodikusan változik megjelenik egy új struktúra: ez *az állapotok sorrendje és periódusa időskálát teremt*.

Ha feltételezzük, hogy egy rendszerben két mező olyan kapcsolatba kerül, hogy egymásra ható energiájuk rezonanciát keltenek, miközben a két jel között fáziseltérés jelenik meg és így stabilizálódik a frekvencia, akkor a fizika szerint a frekvencia definiálja az idő-egységet.

Itt a $\Phi(s) \Rightarrow \Phi(t)$ a vákuum „lélegzése (rezgése) $X(s) \Rightarrow X(t)$ foton + spinor válasza, a kettő kapcsolt jel oszcillációja egy *emergens időkoordinátát* hoz létre. Ezután természetes levezetés az energia tömeggé alakulása, mivel megjelenik a Lorentz-szerkezet.

A frekvencia stabilizálódása után (coupled resonance):

$$E = \hbar\omega$$

Ahol $\hbar$ a Dirac állandó. Az alagútban (throat) lokalizált energia

$$E \Rightarrow mc^2$$

A modell szerint teljesen természetes, hogy a Φ kvantum vákuum lokális deformációja csapdát hoz létre, a foton + spinor X energiamező rezonánsan kötődik hozzá, ez a kötött energia

állóhullámmá válik és létrejön az *effektív tömeg*. Ez az effektív tömeg teszi lehetővé, hogy létrejöjjön a lokális inercia, kialakul a tömeg tehetetlensége és végül elindítsa a tér-idő emergenciát.

Előzőekben említésre került, hogy a rezonancia miatt létrejött az időskála, de ez definiálja a hullámsebességet, a kölcsönhatás sebességét és a fluktuációk terjedését. A sebesség és a terjedés fogalmának megjelenése automatikusan lekéri a távolság fogalmát. A távolság az a fogalom, ami definiálja, hogy egy excitáció adott idő alatt megtesz.

A skalármezők kicsiny perturbációinak diszperziós relációja:

$$\omega^2 = c_{eff}^2 k^2 + m_{eff}^2$$

Az egyenlet kijelöli ω időskálát és k térskálát, ezáltal létrejön egy **emergens metrika**:

$$ds^2 = -c_{eff}^2 dt^2 + dx^2$$

Ez pontosan az, amit a Bose–Einstein kondenzátumok, akusztikus fekete lyukak és emergens gravitációs modellek mutatnak.

A modell azt hangsúlyozza, hogy a világegyetem kialakulásának a tér-idő nem előfeltétel jellemzője, hanem következménye.

Röviden összefoglalva a pregeometriai skalármezők jelenségei és mezőelméleti magyarázata:

idő stabil rezonanciafrekvencia a $\Phi - X$ rendszerben

tér perturbációk diszperziós relációja + sebesség $\Rightarrow$ távolság

tömeg lokalizált energia kötött állapotban

féregjárat vákuum-kink + energiacsapda $\rightarrow$ effektív geometriát létrehozó „alagút”

Megemlítsésemre való, hogy a féregjárat sem egy „geometriai lyuk” előre meghatározott térben.

A pregeometriai akció szerkezete

Fizikai interpretáció

- **Skalármező φ :** alapvető energiahordozó a pregeometriai struktúrában.
- **Spinor-foton kompozit ψ :** lokális alagutak energiamezőjét modellezi.
- **Chern–Simons tag:** topológikus fluxusokat és féregjárat-szerű struktúrákat biztosít.
- **Vákuum-háttér $L_{vac}(t)$** időfüggő kvantumközeg, rezonanciát indukál φ és ψ között.
- **Kinetikus rész:** $L_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$
- **Potenciál:** $L_V = -V(\phi)$
- **Rezonanciás csatolás:** $L_{res} = \lambda \phi^2 \psi$
- **Vákuum-háttér tag:** $L_{vac}(t) = -\rho_{vac}(t)$

Ez a részletes akció képezi az alapját a későbbi geometriai fázis kialakulásának, ahol a metrika és a klasszikus téridő emergensen jelenik meg a kvantummezők kollektív viselkedéséből.

Az akció csak skalár invariánsokat tartalmaz.

$$S_0 = \int dt d^3x [L_{\text{kin}}(\phi) + L_V(\phi) + L_{\text{res}}(\phi, \psi) + L_{\text{vac}}(t)]$$

A skalármező dinamikája

Euler–Lagrange-egyenlet a skalármezőre:

$$\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} + f_{\text{res}}(t, \phi, \psi) = 0,$$

$$\text{ahol } f_{\text{res}}(t, \phi, \psi) = -\frac{\partial L_{\text{res}}}{\partial \phi}$$

Rezonancia és alagútképződés

A kvantumvákuum időfüggő állapotát az $L_{\text{vac}}(t)$ tag reprezentálja. A foton–spinor kompozit mező módusai bizonyos frekvenciákon rezonanciába kerülhetnek a skalármezővel, ami:

1. Energiakonzentrációhoz vezet,
2. Effektív barriereffektust hoz létre a skalárpotenciálban,
3. Lehetővé teszi a rendszer átmenetét egy új állapotba.

Emergens szerkezet: hogyan alakul ki a geometria?

Az emergens metrika a pregeometriai mezők konfigurációjából adódik:

$$g_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}[\phi, \psi]$$

ahol $F_{\mu\nu}$ a skalár- és spinor-foton mezők kollektív viselkedéséből származik.

Pregeometriai modell és akció

A pregeometriai fázisban a teljes akció több mező együttesét tartalmazza, beleértve a skalár-, spinor-, vektor- és topológikus mezőket. Az akció célja, hogy a geometriai fázis felé történő átmenetet dinamikusan vezesse le.

- **A teljes pregeometriai akció**

- $S_0 = \int dt d^3x [L_{\text{kin}}(\phi) + L_V(\phi) + L_{\text{res}}(\phi, \psi) + L_{\text{vac}}(t) + L_{\text{CS}}(A, \phi) + L_{\text{EM}}(F) + L_D(\psi) + L_m(\psi) + L_Y(\phi, \psi)]$

Tagok fizikai értelmezése

- $L_{\text{kin}}(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$
- $L_V(\phi) = -V(\phi)$
- $L_{\text{res}}(\phi, \psi) = \lambda \phi^2 \psi$
- $L_{\text{vac}}(t) = -\rho_{\text{vac}}(t)$
- $L_{\text{CS}}(A, \phi) = \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \partial_\sigma \phi$
- $L_{\text{EM}}(F) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
- $L_D(\psi) = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi)$
- $L_m(\psi) = -m_\psi \bar{\psi} \psi$
- $L_Y(\phi, \psi) = -g \bar{\psi} \psi \phi$

- **Euler–Lagrange-egyenletek**

Skalármezőre:

$$\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} + f_{\text{res}}(t, \phi, \psi) + f_{\text{CS}}(A, \phi) + f_Y(\phi, \psi) = 0$$

Spinor mezőre:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_\psi \psi - g\phi\psi = 0$$

Vektor mezőre:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\phi F_{\rho\sigma}) = 0$$

Coarse-graining és emergens akció

A pregeometriai fázis mikroszkopikus mezőinek integrálása után a rendszer emergens szerkezetet mutat, amely az effektív geometriai fázis alapját képezi. A coarse-graining eljárás célja, hogy a nagyléptékű, kollektív viselkedést adjon vissza egy effektív akció formájában.

Coarse-graining eljárás

A pregeometriai mezőket ϕ és ψ integrálva, egy effektív akciót kapunk:

$$S_{\text{eff}} = \int dt d^3x [L_{\text{eff}}^{\text{kin}}(\phi) + L_{\text{eff}}^V(\phi) + L_{\text{eff}}^{\text{int}}(\phi, \psi) + L_{\text{eff}}^{\text{vac}}(t)]$$

A tagok jelentése:

- $L_{\text{eff}}^{\text{kin}}$: az emergens kinetikus energiát írja le a kollektív mezőkben.
- L_{eff}^V : effektív potenciál a skalármezőre, amely a mikroszkopikus interakciók átlagos hatását tartalmazza.
- $L_{\text{eff}}^{\text{int}}$: a spinor-foton kompozitokkal történő emergens kölcsönhatás.
- $L_{\text{eff}}^{\text{vac}}$: a pregeometriai vákuum átlagos, emergens viselkedése.

Fizikai értelmezés

- A coarse-graining során a mikroszkopikus fluktuációk hatását effektív paraméterekké és kölcsönhatásokká alakítjuk.
- Az emergens szerkezet a korábbi topológikus és rezonanciás hatásokat is tartalmazza, de már nagy léptékben, metrikus szerkezettel kombinálva.
- Ez az effektív akció adja meg a későbbi geometriai fázis kiindulópontját, ahol a metrika és az energia-impulzustenzor explicit formában definiálható.

Összegzés

A coarse-graining révén a pregeometriai fázisból egy jól definiált, effektív akció származik, amely tartalmazza a kollektív mezők kinetikus, potenciál- és kölcsönhatásos hozzájárulásait. Ez a lépés kulcsfontosságú a geometriai fázis kialakulásának leírásában.

A pregeometriai fázis modell újszerűsége

Meglévő elméletek a fizikában különálló kutatási területeken

Pregeometrikus modellek

- A tér-idő nem alapvető, hanem emergens.
(Girelli, Livine, Oriti, Laughlin, Wen, Volovik)

Kvantumvákuum mint kondenzátum

- A vákuum kollektív módon viselkedő közeg.
(Unruh, Visser — analóg gravitáció)

Rezonancia, mint idő-definíció

- Az idő mérhető egy stabil kvantumfrekvenciával (atomórák működése).

Energia $\rightarrow$ effektív tömeg

- Lokalizált energiacsomók tömegként viselkedhetnek. (soliton, Q-ball, oscillon, Higgs-mechanizmus analógiák)

Topológiai alagutak / domain wall struktúrák

- Két vákuum közti átmenet, mint topológiai alagút. (kink, domain wall, instanton tunneling)

A modellben egyben jelenik meg

A pregeometriai fázisban egyszerre történik az alábbi öt dolog:

- ① Nincs kezdetben tér-idő, csak két skalármező létezik.
- ② A kvantumvákuum dinamikája (Φ) hozza létre az alagutakat
Nem geometriai objektumként, hanem energiakonfigurációként.
- ③ A foton + spinor energiamező (X) csak ebben az alagút-konfigurációban létezik. Ami új: vektormezők nélkül, tisztán skalár-proxyként.
- ④ A két mező időfüggő kapcsolata emergens időt hoz létre, ami nem triviális.
A legtöbb elmélet feltételez időt — itt NEM.
- ⑤ A rezonancia révén a lokalizált energiahullám effektív tömeget és tér-időt generál. Ez az igazi új elem. Ez a kombináció **sehol nem jelenik meg egyszerre** a szakirodalomban.

Radikálisan új elképzelések

A tér-idő megjelenése nem a vákuumból, hanem két mező rezonanciájából következik!

Más emergens modellekben:

- a tér-idő a vákuum kollektív állapotából jön (BE-kondenzátum analógok),
- vagy hálózathoz / spinhabból (LQG),
- vagy entanglementből (ER=EPR, AdS/CFT).

De nincs olyan modell, amelyben két skalármező oszcilláló, kölcsönös rezonanciája definiálná az időt és a tömeget.

Összetett foton + spinor mező, mint skalár-proxy, amely csak a járatban létezik!

A jelenlegi fizikában:

- a foton vektormező (A_μ),
- a spinor Dirac-mező,
- és mindkettőnek *tér-időbeli* reprezentációja kell.

A pregeometriai fázisban viszont:

- **előbb** létrejön a járat,
- **utána** jelennek meg ezek a mezők, mint skalár energia-sűrítmények.

Ez egy újfajta „foton/spinor-előtti” modell, amit nem tárgyalnak így.

A féregjárat mint „energia-alagút” $\rightarrow$ tér topológiájának eredete

A féregjáratok a GR-ben (General Relativity = általános relativitáselmélet) a metrika megoldásai.

A pregeometriai fázisban viszont:

előbb alagút van, mint energiakonfiguráció, és ebből jön létre később a tér topológiája. Ez a sorrend a jelenlegi fizikában nem szerepel.

A tömeg megjelenése NEM Higgs-mechanizmus, hanem rezonancia-kondenzáció

A mai fizika szerint:

- a tömeg *egy része* Higgs,
- más része kvarkok kötési energiája.

A pregeometriai fázisban:

- a tömeg kizárólag **rezonancia-energia lokalizálódásának** következménye pregeometrikus környezetben.

Ez teljesen új, nem hagyományos Higgs.

A pregeometriai fázis-modell publikálható értéke

Több irányban is:

✓ Pregeometrikus tér-idő emergenciája új mechanizmussal („Rezonancia-indukált idő”)

✓ Új interpretáció a tömeg keletkezésére (nem Higgs, nem QCD, hanem oszcillációs csapda)

✓ Új modell a féregjárat fogalmára (nem topológiai geometriából, hanem energiálandóból)

✓ Új kvantumvákuum-kép (többlepcsős: prevákuum → vibrációs vákuum → tér-idő-vákuum)

Ezeket egy megfelelően felépített matematikai formalizálással valóban lehet közölni például:

- *Foundations of Physics*
- *Classical and Quantum Gravity*
- *Physical Review D*
- *Entropy*
- *Universe*

vagy filozófiai-fizikai folyóiratokban.

2. A geometriai fázis

A pregeometriai fázis kiinduló állapotára az volt a kikötés, hogy nem tartalmazhat csak skalármennyiségeket. Amikor a két mező rezonál, fellép egy **stabil frekvencia**, és ez hozta létre:

- az idő fogalmát (periódus $\rightarrow$ időskála)
- a tér fogalmát (rezgési módok $\rightarrow$ „irányok”)
- a lokális fénykúpot (diszperziós reláció $\rightarrow$ sebességi határ)
- a tömeget (frekvenciainvariáns energiaskála)

Ezután elindul az a folyamat, amely során **a pregeometriai modellből kifejlődik a teljes mezőelmélet**, vagyis a

$$L_{\text{össz}} = L_{\text{kin}} + L_V + L_{\text{geom}} + L_{CS} + L_{\log} + L_{wh} + L_x + L_{EM} + L_D + L_m + L_Y$$

leírt Lagrange-formula minden tagja *értelmezést nyer*.

Most sorra vesszük, hogy **melyik részegyenlet hogyan jelenik meg az emergens tér-időben**.

A metrika és a kovariáns deriválás kialakulása

A két skalármező rezgéseiből — különösen a vákuumrezgésből Φ -ból — kialakul egy effektív közeghatás. Ahogy a fononok a kristályrácsban, úgy a Φ -mező gerjesztései diszperziós relációt hoznak létre:

$$\omega^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2 + m_{\text{eff}}^2$$

Ez a reláció fénykúpot definiál, tehát egy kauzális szerkezetet. A fénykúp *matematikailag nem más*, mint egy metrika:

$$g_{\mu\nu}(x)$$

Ettől kezdve minden mezőre értelmezhető a kovariáns deriválás:

$$\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + \text{kapcsolatok}$$

Ez a struktúra **eddig nem létezett**, csak a pregeometriai dinamika *kiemelkedő tulajdonságaiból* alakult ki.

A vektormező (foton) létrejötte

A X mező eredetileg egy skalár energiasűrűség volt, amely a foton és spinor energiakonfigurációjának életcsírája. Amikor az idő és tér kialakul, a X -ből, **irányfüggő perturbációk** születnek. Ezek a perturbációk természetes módon transzverzális struktúrát hoznak létre — mint amikor egy membrán hullámai nemcsak felfelé-lefelé, hanem oldalirányban is szétválhatnak. Ez a folyamat vezet az $A_\mu(x)$ mező megjelenéséhez.

Tehát:

- a foton nem volt „előre adott”,
- hanem a X -mező rezgésmódjainak **irányfüggő lebomlásából** emergál.

Ekkor válik értelmessé a tér-időben:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

és így a Lagrange elektromágneses tagja:

$$L_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

A spinormező létrejötte

A modell egyik legérdekesebb pontja. A X-mező nemcsak vektormóddá bomlik fel, hanem kétkomponensű fázisrezgésekre is. Ezek a fázisrezgések a tér-idő megjelenése után már nem egyetlen skalárként viselkednek, hanem irányfüggő, komplex amplitúdójú oszcillációkként. A komplex fázisú amplitúdók természetes matematikai leírása:

$$\psi(x)$$

ami a Dirac-spinor.

Másképp átfogalmazva, a spinor nem egy „eredetileg létező objektum”, hanem **a skalárrezgések belső szimmetriáinak kibontása a tér-idő megjelenése után**. Ekkor jelenik meg a Dirac-kinetikus tag, az L_m fermion tömegével

$$L_D = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - L_m$$

A fermion tömege:

$$L_m = m_\psi\bar{\psi}\psi$$

És végre értelmet nyer a Yukawa-kapcsolat is:

$$L_{Yuk} = -g\bar{\psi}\psi\phi$$

A geometriai vákuumtagok megjelenése

A pregeometriai vákuumstruktúrában a Φ -mező rezonancia- és stabilizációs jelenségei, *mint háttérfluktuációk* jelentkeznek a kialakuló tér-időben. Ez adja értelmét a következő tagnak:

$$L_{geom} = \lambda\Omega(x^\mu, g_{\mu\nu})\Theta(\psi)$$

Ez a tag a tér-idő geometriát kapcsolja össze a vákuum-szerkezettel és a spinor energiával.

Eredete:

- a pregeometriai potenciál finomszerkezete
- a skalármezők háttérváltozásainak mintázatai
- a rezonancia geometriává merevedett folyamatai.

Chern–Simons-tag: topológiai eredet

A Chern–Simons-tag:

$$L_{CS} = \kappa\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\mu F_{\nu\rho}\nabla_\sigma\phi$$

csak akkor tud megjelenni, ha:

- van antiszimmetrikus szerkezet (Levi–Civita-sűrűség)
- van metrika
- vannak irányok
- van vektormező és skalármező is
- és a tér topológiai szerkezete nem triviális

Ezek **mind a tér-idő kialakulásával jelennek meg**, tehát a Chern–Simons csak ekkor nyer értelmet.

Fizikai értelmezése: a pregeometriai struktúra „forgásos”, nemtriviális fázisai topológiai töltésként jelennek meg a geometriai fázisban. Ez az állapot tulajdonképpen a kvantumvákuum „örvényessége”.

A wormhole-hatás effektív formája

A korai alagút (throat) a pregeometriai fázisban *energiakoncentráció* volt. A tér-idő létrejötte után ez egy **geometriai objektummá** válik. Így értelmezhető a Lagrange formula wormhole-potenciálja:

$$L_{wh} = -\frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat})^2$$

Ez egy időfüggő, lokális potenciál, amely a kialakuló vákuumszerkezetet egy speciális energiaállapothoz köti — ez a pregeometriai „alagút” maradványa.

A teljes mezőelméleti struktúra összeállt

Most már minden alkotóelem létezik:

- tér-idő
- metrika
- kovariáns deriválás
- elektromágneses mező
- spinor
- vákuum-potenciál
- topológiai tagok
- wormhole-potenciál
- logaritmikus vákuumkapcsolatok

Már lehet *egyben* értelmezni a teljes nagy $L_{össz}$ Lagrange-formulát. Megállapítható, hogy a

- a Lagrange-egyenlet csak a geometriai fázisban létezik
- minden tagja a pregeometriai világ egy-egy emergens „örököse”
- a teljes mezőelmélet a kezdeti skálár-univerzum effektív leírása

Összefoglalva: a korábban felírt Lagrange-formula NEM a világ kezdete, hanem a világ KIFEJLŐDÉSE által létrehozott mezőelméleti törvényrendszer, aminek minden tagja:

- vagy a pregeometriai vákuumrezgésekből
- vagy azok topológiájából
- vagy az energia-fázisok lebomlásából
- vagy az emergens geometriából

származik.

A teljes egyenlet

$$L_{össz} = L_{kin} + L_V + L_{geom} + L_{CS} + L_{log} + L_{wh} + L_x + L_{EM} + L_D + L_m + L_Y$$

tehát a második fázis *terméke*. Most részletesen ismertetem az $L_{össz}$ egyenlet egyes tagjait.

1. $\mathcal{L}_{kin}$ – skalár mező kinetikus tag

$$\mathcal{L}_{kin} = -\sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$$

Magyarázat

- Standard, minimálisan metrikához csatolt kinetikus tag egy skalár mezőre.
- Biztosítja, hogy a mező hullámai a görbült téridő geometriáját követve terjednek.

Dimenzió/konvenció

- $[\phi] = (\text{mass})$ természetes egységekben, $\mathcal{L}$ dimenziója: mass^4 .

Variáció / hozzájárulás az Euler–Lagrange-hoz

- A hozzájárulás köznap i KG-operátort adja:

$$\delta \mathcal{L}_{kin} \Rightarrow \nabla^\mu \nabla_\mu \phi$$

2. $\mathcal{L}_V$ - potenciáلتag

$$\mathcal{L}_V = -\sqrt{-g} V(\phi)$$

Magyarázat

- $V(\phi)$ lehet például $\frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$, Coleman–Weinberg típusú effektív potenciál, vagy bármilyen többminimumos struktúra.
- Meghatározza a vákuumok helyét, tömeget ($m_\phi^2 = V''(\phi_0)$), fázisátmeneteket.

Variáció

- $\delta \mathcal{L}_V \Rightarrow V'(\phi)$ a mezőegyenletben (contrib. a KG-egyenlethez).

3. $\mathcal{L}_{geom}$ -geometriai/projekciós operátor

$$\mathcal{L}_{geom} = -\sqrt{-g} \lambda \Omega(x^\mu g_{\mu\nu}) \Theta(\psi)$$

Magyarázat

- Ω geometriai funkcionál (pl. R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, vagy egy emergens kernel), (ψ) fermion-bilineáris (például $\bar{\psi}\psi$ vagy $\bar{\psi}\gamma^5\psi$).
- Ez a tag a „pregeometriai információ” (throat/ χ -profil) metrikába / matter-be való átjárását modellezi.

Variáció / hatások

- Ha Ω tartalmaz R -t, ad egy nem-minimális csatolást; $\delta g^{\mu\nu}$ -re ad extra $\propto \delta \Omega / \delta g^{\mu\nu}$ tagot a $T_{\mu\nu}$ -ben.

4. $\mathcal{L}_{CS}$ - Chern–Simons-szerű (CS topológiai) tag

$$\mathcal{L}_{CS} = \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi$$

Magyarázat

- Topológiai jellegű csatolás: a foton-tér és a skalár gradiensének kölcsönhatása.
- Lehet axion-like crossterm: $\propto \phi F \tilde{F}$ alternatívája; itt a gradiensek miatt parity/CP-hatások keletkezhetnek.

Konvenciók megjegyzés

- Ha $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ density vagy tenzor? Ha density ($\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$) használjuk, a tényleges tenzor: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Ennek kezelése fontos a variációban.

Variáció

- A_μ -ra: CS-tól származó extra forrást ad a Maxwell-egyenlethez (lásd korábbi Maxwell-variáció).
- ϕ -ra: $-\kappa \nabla_\sigma (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho})$ szerepel a ϕ egyenletében.

5. $\mathcal{L}_{log}$ – logaritmikus / memória tag

$$\mathcal{L}_{log} = \sqrt{-g} \eta I(\psi) \ln\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)$$

Magyarázat

- $I(\psi)$ egy fermion-függvény (pl. $\bar{\psi}\psi$ vagy valamilyen áram).

- A logaritmus olyan nem-polinomiális, skálafutás-szerű hatást hoz, amely kvantumkorrekciók, entrópia szerű memória modellezésére alkalmas.

Variáció

- ϕ -ra: $-\eta I(\psi)/\phi$ hozzájárulás $\rightarrow$ erős, nem-lineáris forrás a KG-egyenletben.
- $I(\psi)$ -ből jövő hatás ψ variációnál jelenik meg (pl. $I(\psi) = \bar{\psi}\psi$ esetén algebrai hozzájárulás a Dirac-egyenlethez).

Megjegyzés

- Gondosan kezelni kell $\phi \rightarrow 0$ esetet (szingularitás).

6. $\mathcal{L}_{wh}$ - wormhole / throat potenciál (lokalizált)

$$\mathcal{L}_{wh} = -\sqrt{-g} \frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat})^2$$

Magyarázat

- $H_R(x)$ lokalizációs ablak (pl. Gauss/Heaviside a throat régióra), $h_{wh}(t)$ időbeli bekapcsoló, Ψ_{throat} a pregeometriai throat-profil.
- Modellezi, hogy a pregeometriai torkolat „rákényszerít” egy lokális ϕ -értéket.

Variáció

- ϕ -ra: $-\gamma h_{wh} H_R(\phi - \alpha \Psi_{throat})$ forrás a KG-egyenletben.
- $T_{\mu\nu}$ -ban egyszerű potenciál-jellegű, $T_{\mu\nu}^{(wh)} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{wh}$ (ha H_R, h_{wh} nem metrika-függők).

7. $\mathcal{L}_\chi$ - χ -projekciós / mappa tag

$$\mathcal{L}_\chi = \sqrt{-g} \sigma P(\chi) F(\phi)$$

Magyarázat

- $P[\chi]$ egy funkcionális, amely a pregeometriai χ -profilból „kivetít” egy lokális skalárértéket — pl. $P[\chi](x) = \int ds K(x, s) \chi(s)$ vagy egyszerű lokalizált $P[\chi] = \chi(x)$.
- $F(\phi)$ tetszőleges ϕ -függvény (pl. $\phi, \phi^2, e^{-\phi}$, stb.).

Variáció

- ϕ -ra: $\sigma P[\chi] F'(\phi)$ forrás.
- $g^{\mu\nu}$ -ra: ha P nem metrika-függő, csak potenciálként szerepel; ha metrika-függő, további variációk.

8. $\mathcal{L}_{EM}$ - Maxwell (foton) tag

$$\mathcal{L}_{EM} = -\sqrt{-g} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad | \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

Magyarázat

- A foton kinetikus tagja; gauge-invariáns; standard eleme minden kölcsönható mezőelméletnek.

Variáció (Maxwell-egyenlet)

- $\nabla_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu$, ahol a jobb oldalon a fermion (és CS) források állnak: $J^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + J_{CS}^\mu + \dots$.

Stress-energy

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2.$$

9. $\mathcal{L}_D$ - Dirac-kinetikus tag (fermion)

$$\mathcal{L}_D = \sqrt{-g} \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi)$$

Magyarázat

- D_μ maga a spin-conn. + gauge derivált: $D_\mu = \nabla_\mu - iqA_\mu + \omega_\mu$ (ha vierbein/spin-conn. be van vezetve).
- A fenti forma hermetikus; ez a fermion dinamikáját adja görbült térben.

Variáció (Dirac-egyenlet)

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - m_\psi \psi - g\phi\psi + (\text{contrib. from } I, \Theta) = 0.$$

10. $\mathcal{L}_m$ - fermion tömegtag

$$\mathcal{L}_m = -\sqrt{-g} m_\psi \bar{\psi} \psi$$

Magyarázat

- Ha a tömeg Yukawa-mechanizmusból ered, akkor $m_\psi = g \phi_0$ a háttér ϕ 0-ból.

Variáció

- $\bar{\psi}$ -ra: $-m_\psi \psi$ a Dirac-egyenletben; $g_{\mu\nu}$ -ra: hozzájárul $T_{\mu\nu}$ -hez mint $-g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m$ + spinor-függő részek.

11. $\mathcal{L}_Y$ – Yukawa-csatolás

$$\mathcal{L}_Y = -\sqrt{-g} g \bar{\psi} \psi \phi$$

Magyarázat

- A fermion és a skalár közötti leggyakoribb tömeg-képző csatolás.
- Ha ϕ háttérértéke $\phi_0 \neq 0$, akkor $m_\psi^{\text{eff}} = m_\psi + g\phi_0$ (ha előzetes explicit tömeg is van).

Variáció

- ϕ -ra: $-g\bar{\psi}\psi$ forrás a Klein-Gordon (KG)-egyenlet.
- $\bar{\psi}$ -ra: $-g\phi\psi$ a Dirac-egyenletben.

Összefoglalás: Mi ez az egész rendszer?

A teljes Lagrange-sűrűség:

- standard fizikai mezőket tartalmaz
- pregeometriai maradék operátorokat épít bele
- topológiai (Chern–Simons) taggal rendelkezik
- wormhole-potenciált tartalmaz
- fermion–geometria–skalár nemtriviális csatolásait használja
- elektromágneses mezőt, Dirac-mezőt és Yukawa-tagot is tartalmaz

Mindez együtt egy emergens geometriai fázisú univerzum-modell Lagrange-sűrűségét adja.

A következőkben ismertetésre kerül a

- Euler–Lagrange-egyenletek minden mezőre
- energia–impulzustenzor
- Hamilton-formalizmus
- pregeometriai $\rightarrow$ geometriai átmenet matematikai levezetése
- a teljes dokumentumba való beépítés

Euler-Lagrange egyenletek minden mezőre

Végig vesszük a teljes Euler-Lagrange-rendszert a geometriai fázisban szereplő mezőkre. Először röviden rögzítjük az asszumpciókat (induló követelmények), majd minden mezőre (skalár ϕ , vektormező A_μ , spinor ψ és a metrika $g_{\mu\nu}$) levezetésre kerül az Euler-Lagrange-egyenletet, a köztes lépésekkel és fizikailag értelmezem a kapott tagokat.

Asszumpciók:

Az akció:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{tot}$$

A teljes Lagrange-sűrűség a formulának megfelelően egyszerűsítve.

$$\begin{aligned} L_{össz} = & -\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) - \lambda \Omega(x^\mu g_{\mu\nu}) \Theta(\psi) \right] \\ & + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi + \eta I(\psi) \ln\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) - \frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat})^2 \\ & + \sigma P(\chi) F(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) \\ & - m_\psi \bar{\psi} \psi - g \bar{\psi} \psi \phi \end{aligned}$$

Tagok fizikai értelmezés

Az egyes lokális skalár-tagokat úgy kezeljük, hogy kovariáns sűrűségként szerepelnek — ez a legegyszerűbb, koherens feltételezés a levezetéshez.

Általános variációs formula (mezőkre görbült térben)

Egy mező Φ Euler-Lagrange-egyenlete a sűrűség $\mathcal{L}_{tot}$ esetén:

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{tot}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0$$

Itt ∇_μ a kovariáns derivált. Ha $\mathcal{L}$ explicit $\sqrt{-g}$ -t tartalmaz, akkor a fenti forma a legpraktikusabb: a tényleges variáció után leoszthatjuk $\sqrt{-g}$ -vel, ha szükséges. A kettős egyenlet az akcióvariáció

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$$

ami megmutatja, hogyan változik S , ha a Φ mező kismértékben megváltozik

$$\Phi \rightarrow \Phi + \delta \Phi$$

A fizikai állapot az, amire felírható

$$\delta S = 0$$

vagyis az akció stacionárius.

Az egyenlőségünk további része:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0$$

A baloldali első tag

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \Phi}$$

a Lagrange- sűrűség explicit mezőfüggősége

Mit jelent?

- Ha a mező önmagában változik,
- de a deriváltjai nem (tehát $\nabla_\mu \Phi$ fix),
- akkor ez adja meg, hogyan változik a Lagrange-sűrűség.

Ez az úgynevezett „potenciális” hatás, amely a mező értékéből származik

Példák:

- tömegtag: $m^2 \Phi^2$,
- potenciál: $V(\Phi)$,
- kölcsönhatások: $g \bar{\psi} \psi \Phi$.

A baloldali második tag

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right)$$

Ez a Lagrange-sűrűség függése a mező deriváltjától.

Itt:

- először megvizsgáljuk, hogyan függ a Lagrange-sűrűség a mező deriváltjától: $\nabla_\mu \Phi$,
- majd ennek gradiensét vesszük a téridőben (kovariáns deriválással).

Ez a rész a kinetikus és dinamikus viselkedést hordozza.

A kinetikus tag (pl. $g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi$) miatt mindig létrejön a hullámeqyenlet-szerű rész:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi.$$

Ezért a mezők mozgásegyenlete KG-, Dirac-, Maxwell-, vagy Yang–Mills-típusú lesz.

Az első egyenlőség jelentése

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right)$$

A funkcionális derivált definíciója szerint ez a mezőelméleti Euler–Lagrange formula.

Második egyenlőség $\rightarrow$ nulla

Az akcióelv szerint a fizikai pályákon:

$$\delta S = 0.$$

Azaz a mező dinamikája olyan, hogy **a teljes kifejezés zérusra adódik.**

Ez a *mező mozgásegyenlete*.

Általános szóhasználatlál élve az egyenlet megmutatja, hogy hogyan változik a Lagrange-függvény a mező és a mező deriváltjának megváltozására. Ha ez a változás éppen kiegyenlíti egymást (nulla), akkor megkaptuk a mező mozgásegyenletét.

Bevezetett példák

Általános konvenciók (minden részre érvényes)

- Metrika aláírását választom: $(- + + +)$ (azaz $g_{00} = -1$ lokálisan Minkowski-ban).
- A téridő mértéktényezője: $\sqrt{-g}$.
- Kovariáns derivált: ∇_μ . Spinoroknál a D_μ tartalmazza a gauge- és spin-connection részt: $D_\mu = \nabla_\mu - iqA_\mu + \omega_\mu$ (ha vierbein bevezetését részletezzük).
- Levi-Civita numerikus tömb: $\varepsilon^{0123} = +1$. A tenzor: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. (Ezt B-ben használok részletesen.)
- Sűrűség: az akció $S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{loc}$.

Konkrét példa

Teljes explicit Euler-Lagrange-egyenlet és $T_{\mu\nu}$ energiaimpulzus tenzor, ha $I(\psi) = \bar{\psi}\psi$, $\Theta(\psi) = \bar{\psi}\psi$, $P[\chi] = \chi(x)$, $F(\phi) = \phi$ helyettesítésekkel.

a. Az explicit effektív Lagrange-sűrűség (ezzel dolgozunk)

$$\begin{aligned} L_{loc} = & -\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) - \lambda \Omega(x^\mu g_{\mu\nu}) \Theta(\psi) \right] \\ & + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi + \eta I(\psi) \ln\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) - \frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat})^2 \\ & + \sigma P(\chi) F(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) \\ & - m_\psi \bar{\psi} \psi - g \bar{\psi} \psi \phi \end{aligned}$$

A $\sqrt{-g}$ faktorokat mindig ott írom, ahol skalár sűrűségről van szó. Az egyes tagok fizikai értelmezése:

- $-\sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$: skalármező kinetikus tagja.
- $-\sqrt{-g} V(\phi)$: skalármező potenciálja.
- $-\sqrt{-g} \lambda \Omega \Theta(\psi)$: geometriai proxy-k csatolása spinor mezőhöz.
- $\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi$: Chern–Simons topológikus kölcsönhatás.
- $\eta I(\psi) \ln(\phi_0/\phi)$: logaritmus csatolás a pregeometriai vákuumhoz.
- $-\frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat})^2$: feregjárat-throat energetikai hozzájárulása.
- $\sigma P[\chi] F(\phi)$: projektív kölcsönhatás.
- $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$: elektromágneses mező kinetikus tagja.
- $\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi)$: spinor mező kinetikus tagja.
- $-m_\psi \bar{\psi} \psi$: spinor tömegtag.
- $-g \bar{\psi} \psi \phi$: Yukawa-csatolás a skalármezőhöz.

b. Euler–Lagrange a skalárra ϕ

Változtatva ϕ -ra (standard partról-integrálás, határfeltételek elhagyva):

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + V'(\phi) - \frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \nabla_\sigma (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho}) - \eta \frac{\bar{\psi}\psi}{\phi} - \gamma h_{wh} H_R (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}}) + \sigma \chi(x)$$

$$-g \bar{\psi}\psi = 0.$$

Megjegyzések:

- $V'(\phi) = \partial V / \partial \phi$.
- A CS-tagból adódóan a ϕ -egyenletben egy divergencia-szerű kifejezés jelenik meg (másfajta axion-típusú csatolástól eltérő forma).
- A η -tagnál a derivált $\partial_\phi \ln(\phi_0/\phi) = -1/\phi$.

c. Euler–Lagrange a vektormezőre A_μ (Maxwell + CS + fermion forrás)

A Maxwell-variáció eredője:

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + J_{\text{CS}}^\mu$$

ahol (a CS-contrib rövidített alakban)

$$J_{\text{CS}}^\mu = 2\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi - \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \nabla_\alpha (A_\beta \nabla_\sigma \phi)^{\mu\text{-term}}.$$

A teljes index-szintű bontás B-ben lesz részletesen kiadva; itt a gyakorlatban a fontos: CS módosítja a Maxwell-forrást, és a fermionáram $q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ a hagyományos forrás.

d. Euler–Lagrange a spinorra ψ

Variálva $\bar{\psi}$:

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - m_\psi \psi - g\phi\psi + \eta \ln\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) \psi + \lambda \Omega(x, g) \psi = 0$$

ha $\Theta(\psi) = \bar{\psi}\psi$, akkor $\delta\Theta/\delta\bar{\psi} = \psi$.)

Konjugált egyenlet a $\bar{\psi}$ variációnál.

e. Energia–impulzustenzor $T_{\mu\nu}$ — explicit komponensek (mezőnként)

A teljes $T_{\mu\nu}$ az egyes mezők hozzájának összege. A fő részek:

(1) Skalár

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) - \sigma\chi(x)\phi + \frac{\gamma}{2} h_{wh} H_R (\phi - \alpha\Psi)^2 \right),$$

ha a wh-potenciál és a χ -tagot is besoroljuk a skalárpotenciálok közé.

(2) EM

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

(3) Fermion

$$T_{\mu\nu}^{(\psi)} = \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma_{(\mu} D_{\nu)} \psi - (D_{(\mu} \bar{\psi}) \gamma_{\nu)} \psi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\psi.$$

(4) Log-tag és geom tag, mint potenciálok:

$$T_{\mu\nu}^{(\log)} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\log}, \quad T_{\mu\nu}^{(\text{geom})} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{geom}} + (-2) \delta(\lambda \Omega \Theta) / \delta g^{\mu\nu} \text{ (ha } \Omega \text{ metrika-függő)}.$$

Végül:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(EM)} + T_{\mu\nu}^{(\psi)} + T_{\mu\nu}^{(\log)} + T_{\mu\nu}^{(\text{geom})} + \dots$$

Az explicit variációk itt kibonthatók, de ez a teljes, konzisztens záró forma.

Az $\mathcal{L}_{CS}$ - Chern–Simons-szerű (CS topológiai) tag (indexszinten) variációja — teljesen részletes, mind az A_μ -ra, mind $g_{\mu\nu}$ -re (stress-tensor részletesen).

1. CS-tag definiálása és Levi-Civita konvenció

Legyen

$$\mathcal{L}_{CS} = \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi.$$

Emlékeztetés: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, ahol $\varepsilon^{0123} = +1$.

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{L}_{CS}$ implicit tartalmazhat $1/\sqrt{-g}$ -t. Gyakorlati módszer: írjuk először a density-formát (numerikus ε -val), majd bontsuk ki a metrika-függéseket.

2. Variáció A_μ szerint (Maxwell-módosítás)

A CS-tag variációja A_μ -ra:

$$\delta_A \mathcal{L}_{CS} = \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\delta A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi + A_\mu (2\nabla_{[\nu} \delta A_{\rho]}) \nabla_\sigma \phi).$$

Integrálva partról és rendezetten, kapjuk a Maxwell-egyenlet CS-forrását. A végső, indexszintű hozzájárulás:

$$J_{CS}^\mu = 2\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi - \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \nabla_\alpha (A_\beta \nabla_\sigma \phi)^{\mu\text{-kontrakció}},$$

azaz a jól ismert első tag domináns: $2\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi$. (A második, határ/kontrakciós tag a részletes bontásból adódik; gyakran elhanyagolják vagy átalakul a teljes divergencia miatt, ha határfeltételek úgy vannak választva.)

Tehát a Maxwell-egyenlet:

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = J_\psi^\mu + 2\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi + \dots$$

3. Variáció metrika szerint: $T_{\mu\nu}^{(CS)}$

A CS-tag metrika-variációja bonyolult, mert:

- $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tartalmaz $\sqrt{-g}^{-1}$, ezért $\delta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$.
- indexek kontrahálása $g^{\alpha\beta}$ -től függhet (pl. $F^{\nu\rho} = g^{\nu\alpha} g^{\rho\beta} F_{\alpha\beta}$).

A formális definíció:

$$T_{\mu\nu}^{(CS)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{CS}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{CS}.$$

Felbontva a részeket (főbb hozzájárulások):

- a $\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ részből adódó tag $\propto \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{CS}$ és egy nemtriviális antiszimmetrikus rész,
- a $F^{\nu\rho}$ variálása: $\delta F^{\nu\rho} = -F_\lambda^\nu \delta g^{\lambda\rho} - F_\lambda^\rho \delta g^{\lambda\nu} \rightarrow$ további metrika-kötött tagok,
- a $\nabla_\sigma \phi$ indexelése is szerepet játszik.

Eredményként: $T_{\mu\nu}^{(CS)}$ egy nem-szimmetrikus részletet is tartalmazhat (kanonikus formában), amelyet Belinfante-féle javítással lehet szimmetrikussá tenni. Konkrét zárt forma (teljes indexekkel) hosszú; ezért azt javaslom: ha publikációhoz kell, felírom teljesen a választott konvenciónak megfelelően (feldolgozom a $\delta \epsilon$ és $\delta F^{\alpha\beta}$ pontos kifejtését).

Röviden, fontos jellemzők:

- $T_{\mu\nu}^{(CS)}$ tartalmazhat antiszimmetrikus részt $\rightarrow$ fizikai következmények (anguláris momentum/források)
- A CS-tag nem egyszerű „ $-g_{\mu\nu}$ times L” formájú potenciál

Kifejezetten T_{00}, T_{0i}, T_{ij} komponensek kiszámítása — skalár és EM részre (lokálisan inercia-keretben)

Itt a gyakorlati, fizikailag leggyakrabban használt komponenseket adom meg explicit, könnyen értelmezhető formában. A számításokat lokális ortonormált (Minkowski) keretben végzem, ahol $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. (Általános görbült térben ezek a komponensek a vierbein-transzformációk miatt hasonló alakúak, de g_{00}, g_{0i} faktort be kell vonni.)

1. Skalármező $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$

Általános formula:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right).$$

Lokálisan (inercia-keret):

- Energiatartalom T_{00} :

$$T_{00}^{(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi).$$

(itt $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$, $(\nabla \phi)^2 = \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi$.)

- Energiaáram / impulzus sűrűség T_{0i} :

$$T_{0i}^{(\phi)} = \dot{\phi} \partial_i \phi.$$

- Térbeli komponensek T_{ij} :

$$T_{ij}^{(\phi)} = \partial_i \phi \partial_j \phi - \delta_{ij} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right).$$

Az utolsó formula nyomásfelosztást ad: izotróp esetben $p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi)$.

2. Elektromágneses tér $T_{\mu\nu}^{(EM)}$

Általános formula:

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^\alpha - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Definiálja az inercia-keret elektromos és mágneses mezőit:

$$E_i = F_{i0}, B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}.$$

- Energiatartalom T_{00} :

$$T_{00}^{(EM)} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2).$$

- Energiaáram / Poynting vektor T_{0i} :

$$T_{0i}^{(EM)} = (E \times B)_i = \varepsilon_{ijk} E_j B_k.$$

- Térbeli komponensek T_{ij} (stress tensor):

$$T_{ij}^{(EM)} = -(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2)).$$

(Megjegyzés a jelölésben: a mínusz a metrika konvenciónkból adódik; sok irodalomban más elrendezés látszik, ezért mindig érdemes a jelölést kiírni.)

3. Összegzés: fizikai jelentés

- $T_{00} \rightarrow$ energiasűrűség: $\rho = \rho_\phi + \rho_{EM} + \rho_\psi + \dots$
- $T_{0i} \rightarrow$ energiaáram / momentum-sűrűség (Poynting vektor + skalár-áram + fermionrészek)
- $T_{ij} \rightarrow$ térbeli stresszek: nyomás + nyíróerők

Ezek a komponensek közvetlenül használhatók pl. Einstein-egyenlet jobb oldalában (FRW-koordinátákban $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$), gravitációs hullámforrás-kalkulációhoz stb.

Miért mondhatjuk, hogy az $\mathcal{L}_{\text{össz}}$ -egyenletre, hogy Klein–Gordon mezőegyenlet („KG típus”)?

Mert a kapott teljes mezőegyenlet általános alakja:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + (\text{potenciálból származó tagok}) + (\text{csatolásokból származó tagok}) = 0$$

ami struktúrájában ugyanaz, mint a Klein–Gordon-egyenlet — csak éppen:

- nemcsak egy $m^2 \phi$ tömegtag van,
- hanem sokféle **effektív tömeg, csatolási tag, anomaliaszerű term, wormhole-potenciál, spinor interakció, Chern–Simons-eredetű derivált** is megjelenik.

Vagyis: **általánosított, kölcsönhatásokkal bővített Klein–Gordon mezőegyenlet.**

A kvantum vákuum ϕ -mező teljes mezőegyenlete mitől KG-típusú?

A geometriai fázisra definiált összesített Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}_{\text{össz}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_{\text{geom}} + \mathcal{L}_{\text{CS}} + \mathcal{L}_{\text{log}} + \mathcal{L}_{\text{wh}} + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_Y.$$

A ϕ -mező Euler–Lagrange-egyenlete:

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Ez egy **nagyon összetett** mezőegyenlet, de kiválóan csoportosítható.

1. A KG-alaprész (alapstruktúra)

A tiszta relativisztikus skalármező Lagrange-ja:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi,$$

ebből:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi$$

jön ki, ez a **d’Alembert-operátor**.

Ez a **Klein–Gordon alap**:

$$\square \phi = \nabla^\mu \nabla_\mu \phi.$$

Ezért mondjuk, hogy az egyenlet „KG típusú”: az egész struktúra erre az operátorra épül.

2. Potenciálból származó „tömegszerű” és nemlineáris tagok

A potenciál:

$$\mathcal{L}_V = -\sqrt{-g} V(\phi)$$

adja hozzá:

$$+ \frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

Ez tartalmazhat:

- effektív tömeget

$$m_{\text{eff}}^2 \phi$$

- nemlineáris öninterakciót
(pl. $\lambda \phi^3$, ϕ^4 , stabilizáló tagok)
- többvölgyű vákuumpotenciált

Ez az, ami a „KG-egyenletben lévő tömegtagot” általánosítja.

3. Geometriai fázisból származó csatolási tag

A tag:

$$\lambda \Omega(x^\mu, g_{\mu\nu}) \Theta(\psi)$$

nem függ direkt a ϕ -től $\rightarrow$ csak a **sokszorozó** $\sqrt{-g}$ miatt járul hozzá a teljes energiához, de **nem ad** $\partial V / \partial \phi$ formát.

Ezért **nem jelenik meg a ϕ -mező egyenletben forrásként** $\rightarrow$ csak a metrikamező $T_{\mu\nu}$ -jében.

4. Chern–Simons (CS) derivált-csatolás

(Igen: CS = Chern–Simons)

A tag:

$$\kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi.$$

Részletezve:

- derivált-mezőcsatolás,
- antiszimmetrikus struktúra,
- topologikus eredetű.

A mezőegyenletben:

$$+ \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\sigma (A_\mu F_{\nu\rho})$$

formában jelenik meg.

Ez egy teljesen új tulajdonság:

- torziószerű szálas hatás,
- chirális eltolás,
- effektív pseudoskalarális csatolás.

Ez **nincs jelen a standard inflációs, KG vagy Higgs-mező teóriákban.**

5. Logaritmikus pregeometriai memóriahatás

A tag:

$$\eta I(\psi) \ln(\phi_0/\phi)$$

jelentése:

- a pregeometriai fázis **információja** tovább él,
- a ϕ -mező *nem lineáris, nem analitikus* kölcsönhatása,
- $\partial/\partial\phi \rightarrow \sim 1/\phi$ típusú hozzájárulás.

A mezőegyenletben:

$$+\eta I(\psi) \frac{1}{\phi}.$$

Ez kifejezetten **új típusú memóriahatás**, amely más kozmológiai modellekben nincs.

6. Wormhole-potenciál (WH)

$$\mathcal{L}_{\text{wh}} = -\frac{\gamma}{2} h_{\text{wh}}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}})^2.$$

Mezőegyenletben:

$$+\gamma h_{\text{wh}}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}}).$$

Fizikai tartalom:

- a ϕ -mezőt **lokálisan rögzíti** a féregjárat throat-profilhoz,
- mintha egy időben változó potenciál-gödör lenne,
- kvázi „pozicionálja” a mezőt.

Ez **szintén nincs jelen** standard mezőelméletekben.

7. χ -projekciós tag

$$\sigma P[\chi] F(\phi)$$

adja:

$$+\sigma P[\chi] F'(\phi)$$

a mezőegyenletbe.

Ez a tag:

- a pregeometriai mezők „lenyomata” a geometriai fázisban,
- egy emergens mező lenyomata (proxy mező).

Egyedi, más modellekben nincs.

8. Yukawa-tag (fermionos forrás)

$$-g\bar{\psi}\psi\phi$$

a mezőegyenletben:

$$-g\bar{\psi}\psi.$$

Ez a standard Yukawa-forrásmező.

9. A teljes ϕ -mező egyenlet összefoglalva

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} + \gamma h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{throat}) + \sigma P[\chi] F'(\phi) + \eta I(\psi) \frac{1}{\phi} + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\sigma (A_\mu F_{\nu\rho}) - g \bar{\psi} \psi = 0$$

Ez egy **generalizált nonlinearis Klein–Gordon mezőegyenlet**, amely:

- potenciált tartalmaz,
- wormhole-hatásokat,
- topológiai CS-termet,
- nem analitikus logaritmikus memóriát,
- előző fázisból projekciót,
- fermionos Yukawa-forrást.

Ezért nevezhető:

„többfázisú, topológiailag csatolt, memóriás KG-egyenletnek”
ami a szakirodalomban egyedülálló.

10. Összegzés

Az $\mathcal{L}_{össz}$ összesített Lagrange-sűrűség egyenletből a ϕ -mező Euler–Lagrange-egyenlete:

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Itt $\partial \mathcal{L} = \partial \mathcal{L}_{össz}$ szerint kell értelmezni. A megállapítás azért fontos mert a ϕ -mező közvetlenül csak néhány komponensben jelenik meg

$$(pl. \mathcal{L}_{kin}, \mathcal{L}_V, \mathcal{L}_{CS}, \mathcal{L}_{log}, \mathcal{L}_{wh}, \mathcal{L}_\chi, \mathcal{L}_Y)$$

viszont az Euler–Lagrange-egyenlet *mindegyiket összegezve* adja meg a teljes meződinamikát.

Ezért lesz a mezőegyenlet olyan gazdag:

- KG-alap
- effektív potenciál
- csatolt deriváltak (CS-term)
- logaritmikus memória
- wormhole-potenciál
- χ -projekciók
- Yukawa-forrás

ezek mind **egy egyenletbe** gyűlnek. Itt az Euler Lagrange egyenlet

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{össz}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \text{ és } \frac{\partial \mathcal{L}_{össz}}{\partial \phi}$$

összefüggése szerint mind a 11 tagjára explicit módon levezethető. Ahol a szükséges parciális deriváltak mezőnkénti elnevezése legyen $\mathcal{L}_{loc}$, mezőnként két mennyiséget kell számolni:

- a „momentum-sűrűség”

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{loc}}{\partial (\nabla_\mu \phi)}$$

amelyből $\nabla_\mu(\dots)$ lesz

- az explicit ϕ -mezőfüggést

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi}$$

Előre jelzem: a konvenciók megegyeznek az eddig megbeszéltekkel — az akció

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{loc}},$$

ahol most $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ a helyi Lagrange-skalár (tehát az a mennyiség, amelyet a $\sqrt{-g}$ szoroz). Az Euler–Lagrange-formulát a következő formában használom (skalármezőre):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)}) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi} = 0.$$

Ez ekvivalens azzal a formával, amit korábban használtunk; itt $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ a „per-volume” Lagrange-skalár.

A korábbi felbontás alapján a lokális Lagrange-skalár (az egyszerűség kedvéért itt felsorolom azokat a tagokat, amelyek explicit ϕ -függést vagy $\nabla\phi$ -függést tartalmaznak):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{loc}}(\phi, \nabla\phi, \psi, A, \dots) &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + \lambda \Omega(x, g) \Theta(\psi) \\ &\quad + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu F_{\nu\rho} \nabla_\sigma \phi + \eta I(\psi) \ln \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}})^2 + \sigma P[\chi] F(\phi) \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) \\ &\quad - m_\psi \bar{\psi} \psi - g \bar{\psi} \psi \phi. \end{aligned}$$

Megjegyzés: az itt szereplő $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ a **Levi-Civita tenzor** (konvenció: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ és $\varepsilon^{0123} = +1$). (Ha te más konvenciót használsz, jelezd, és ugyanígy átírjuk.)

A szükséges parciális deriváltak — mezőnként

a) a kinetikus (I) tagból

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{kin}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = -g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{kin}}}{\partial \phi} = 0$$

Ez a standard eredmény.

b) a potenciálból (II) tag

$$\mathcal{L}_V = -V(\phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial \phi} = -V'(\phi)$$

ahol

$$V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$$

c) a Chern–Simons-szerű (III) tagból

$$\mathcal{L}_{CS} = \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} A_\alpha F_{\beta\rho} \nabla_\sigma \phi$$

Ez a tag **kizárólag** a $\nabla_\sigma \phi$ -en keresztül tartalmaz ϕ -t, explicit ϕ -függése nincs.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial \phi} = 0$$

megjegyzés.: az indexet felcseréltem a helyes helyettesítéshez: a $\nabla_\sigma \phi$ -re való deriválás $\sigma \mapsto \mu$ -t ad.)

Fontos: ha $\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}$ density-ként vagy tenzorként definiáltad, a pontos alakban $1/\sqrt{g}$ faktorok jelenhetnek meg — itt a fenti összefoglaló az általad korábban használt tenzor-konvenciót követi.

d) a logaritmikus „memória” (IV) tagból

$$\mathcal{L}_{\log} = \eta I(\psi) \ln \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\log}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\log}}{\partial \phi} = -\eta \frac{I(\psi)}{\phi}$$

Itt $I(\psi)$ egy adott fermion-funkcionál; ha pl. $I(\psi) = \bar{\psi}\psi$, akkor a fenti egyszerűen értelmezhető.

e) a wormhole (wh) potenciálból (V) tag

$$\mathcal{L}_{wh} = -\frac{\gamma}{2} h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}})^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{wh}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{wh}}{\partial \phi} = -\gamma h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}})$$

Helyi, kvadratikus rögzítő potenciál a throat régióban

f) a χ -projekciós (VI) tagból

$$\mathcal{L}_\chi = \sigma P[\chi] F(\phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\chi}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\chi}{\partial \phi} = \sigma P[\chi] F'(\phi)$$

Ha $F(\phi) = \phi$, akkor ez egyszerűen $\sigma P[\chi]$.

g) Yukawa- és fermionos (VII) tömegtagokból

$$\mathcal{L}_Y = -g \bar{\psi} \psi \phi, \mathcal{L}_m = -m_\psi \bar{\psi} \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_Y}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}_Y}{\partial \phi} = -g \bar{\psi} \psi$$

A tiszta fermion-tömegtag nem függ ϕ -től, kivéve, ha m_ψ is ϕ -függő; itt külön kezeljük a Yukawa-t.

h) Egyéb (VIII-XI) tagok

A $\mathcal{L}_{\text{geom}}$, $\mathcal{L}_{\text{EM}}$, $\mathcal{L}_D$ nem tartalmaznak explicit ϕ -függést (az EM és Dirac-tagok közvetetten járulnak hozzá a többi mezőegyenlethez), ezért ezekből:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{geom}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0$$

Az EM-tag közvetlenül a A_μ -egyenletet adja, nem ϕ -ét — kivéve, ha $F(\phi)$ vagy hasonló csatolás lenne.

i) Alkalmazzuk az Euler–Lagrange-formulát és állítsuk össze az egyenletet

A momentum-sűrűség összege:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = -g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi + \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho}.$$

Beírjuk az Euler–Lagrange -formulába:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} [-g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi + \kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho}]) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi} = 0.$$

Kibontva, és használva a fent számolt $\partial \mathcal{L}_{\text{loc}} / \partial \phi$ -okat, kapjuk (először kompakt formában):

$$-\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\kappa \epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho}) - [-V'(\phi) - \eta \frac{I(\psi)}{\phi} - \gamma h_{wh} H_R(\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}}) + \sigma P[\chi] F'(\phi) - g \bar{\psi} \psi] = 0.$$

Egyszerűsítsünk: rendezzük a tagokat úgy, hogy a klasszikus KG-forma legyen az első. Az előbbi egyenlet átrendezhető (szorozzuk meg -1 -gyel és rendezzük):

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - V'(\phi) - \eta \frac{I(\psi)}{\phi} - \gamma h_{wh}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}}) + \sigma P[\chi] F'(\phi) - g \bar{\psi} \psi - \frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho}) = 0$$

Ez a **teljes, kovariáns forma**: a jobboldalon szereplő első két tag a Klein–Gordon-mag (d^2 Alembert operátor és a potenciál deriváltja), utána következnek az összes extra előjelző, nemlineáris és csatolt tagok (logaritmikus memória, wormhole-hoz

kötött lokális rögzítés, χ -projekció, Yukawa-forrás és a CS-eredetű divergencia koncentrárum.

j) Rövid magyarázat a tagok fizikai jelentéséről (egy sorban-soranként)

- $\nabla^\mu \nabla_\mu \phi$: a KG-operátor (d'Alembert).
- $-V'(\phi)$: a potenciál által létrehozott „tömegszerű” és öninterakciós erő.
- $-\eta I(\psi)/\phi$: a logaritmikus memóriahatás; nem-analitikus, erős hatás $\phi \rightarrow 0$ közelében.
- $-\gamma h_{wh} H_R(\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}})$: a főregijarat-torkolat lokális rögzítése (aktuális forrás).
- $+\sigma P[\chi] F'(\phi)$: a pregeometriai χ -projekció hatása (ha $F(\phi) = \phi$, egyszerű additív forrás).
- $-g \bar{\psi} \psi$: a fermion (Yukawa) forrás.
- $-\frac{\kappa}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} A_\alpha F_{\beta\rho})$: a Chern–Simons-csatolás által létrehozott derivált-forrás; topológikus, királis (chiral effect) hatásokat visz be.

A $\nabla^\mu \nabla_\mu \phi$ -a kovariáns d'Alembert-operátor, az ún. box-operator, gyakran $\square$ vagy „laplace–beltrami operátor” - levezetése a Lagrange-egyenletből.

A $\square \phi$ operátort úgy kapjuk meg, hogy a kinetikus tagból számoljuk a momentum-sűrűséget $-g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi$, majd alkalmazzuk a kovariáns divergenciát $\nabla_\mu (\cdot)$ — ennek eredménye pontosan $\nabla^\mu \nabla_\mu \phi$.

a) Kiindulás — a kinetikus tag az akcióban

A skalár mező kinetikus része a lokális Lagrange-sűrűségben (a $\sqrt{-g}$ nélküli $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ -ban) így szerepel:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(\phi, \nabla \phi) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi.$$

Az akció tehát

$$S_{\text{kin}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi.$$

b) Variáció — a momentum-sűrűség

Az Euler–Lagrange-hez szükséges első lépés a parciális derivált

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)}$$

Kiszámítása a kinetikus tagból. Egyszerűen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{kin}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = -g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi.$$

c) Euler–Lagrange forma görbült térben

A megfelelő forma (a $\sqrt{-g}$ -gal együtt) így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)}) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi} = 0.$$

Behelyettesítve a kinetikus rész momentumát:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} (-g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi)) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi} = 0.$$

d) A kovariáns divergencia és a d'Alembert-operátor

Használjuk, hogy a kovariáns divergencia a sűrűségre:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) = \nabla_\mu A^\mu$$

Ezért az első tag:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\mu (\sqrt{-g} (-g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi)) = -\nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) = -\nabla^\mu \nabla_\mu \phi.$$

A második egyenlőség a metrika kompatibilitásából és az indexemelések szabályából következik: $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$

Így a kinetikus rész variációja pontosan a $-\square\phi$ -t adja, ahol

$$\square\phi \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu \phi$$

e) Teljes mezőegyenlet részletezve

Ha a teljes $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ -ból összeszámoljuk az összes ϕ -függő részt (potenciál, CS, log, wh, χ , Yukawa stb.), akkor az EL-egyenlet bal oldala a kinetikus rész helyén a $-\square\phi$ -t adja. Átrendezve a konvencionális KG-szerkezetre kapjuk:

$$\square\phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial \phi} = 0,$$

ami megegyezik azzal a korábban megadott formával (a $\partial \mathcal{L}_{\text{loc}} / \partial \phi$ tartalmazza $V'(\phi)$, $-\eta I(\psi)/\phi$, $\gamma h_{wh} H_R(\phi - \dots)$, stb.).

Tehát a $\square\phi$ operátort úgy kapjuk meg, hogy a kinetikus tagból számoljuk a momentum-sűrűséget $-g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi$, majd alkalmazzuk a kovariáns divergenciát $\nabla_\mu(\cdot)$ — ennek eredménye pontosan $\nabla^\mu \nabla_\mu \phi$.

f) Explicit koordinátakifejezés (hasznos számításokhoz)

A kovariáns d'Alembert-operátor indexszinten:

$$\square\phi = \nabla^\mu \nabla_\mu \phi = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi).$$

Ez a forma feltárja a Christoffel-tagokat ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$), amelyek a görbült téridő hatását adják a másodrendű deriváltak mellé.

g) Példa: FRW (Friedmann–Robertson–Walker) -metrika (kozmológiai alkalmazás):

Legyen az FRW metrika (kozmológiai idő t , skála-faktor $a(t)$):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2.$$

Ekkor (skalár mezőre, homogén részt tekintve $\phi = \phi(t)$):

$$\square\phi = -(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi,$$

vagy homogén esetben $\nabla^2\phi = 0$,

$$\square\phi = -(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}),$$

ahol $H = \dot{a}/a$. Figyeld meg a minuszjelet: konvencionként a $\square$ jelentése $\nabla^\mu\nabla_\mu$, és a $g^{00} = -1$ miatt az időderivált részek így jelennek meg.

Ez a forma jól használható a kozmológiai KG-egyenlet numerikus/szimbolikus kezelésekor.

h) Összegzés röviden — hogyan „kapjuk meg” a $\nabla^\mu\nabla_\mu\phi$ operátort

- A kinetikus tagból számolni kell a momentum-sűrűséget: $\partial\mathcal{L}/\partial(\nabla_\mu\phi) = -g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi$.
- Alkalmazni szükséges a kovariáns divergenciát: $\nabla_\mu(\dots)$. Mivel $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, ez $-\nabla^\mu\nabla_\mu\phi$ -t ad.
- Az EL-egyenletbe beillesztve és átrendezve kapjuk a $\square\phi$ (KG) operátort a többi forrással együtt:

$$\square\phi - \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{loc}}}{\partial\phi} = 0$$

A proxy-mezők (coarse-grained = durva szemcsés) keletkezése és az effektív energia–impulzustenzor levezetése

a. Kiindulási helyzet – mik azok a proxy-mezők?

A modellben szereplő

$$\chi(x), \Psi_{\text{throat}}(x)$$

mezők **nem fundamentális mezők**, hanem **coarse-graining**, azaz **átlagolási / skálaszeparációs eljárás** eredményei.

Ez azt jelenti:

- vannak *fundamentális* mezők:

$$\phi, \psi, A_\mu,$$

- ezek fluktuációi sokféle **mikró-szerkezetet** hoznak létre a pregeometriai fázisban,
- de a nagyobb skálán a finom részletek *nem megfigyelhetők*, csak az **átlagolt mintázatok**,
- ezért ezeket új, makroszkopikus mezők formájában reprezentáljuk.

Ezek a makroszkopikus mezők a proxy-mezők.

A kialakulás oka:

fluktuációk $\rightarrow$ nemlineáris kölcsönhatások $\rightarrow$ szerkezetek $\rightarrow$ átlagolás $\rightarrow$ effektív mező.

Ez **ugyanaz a matematikai mechanizmus**, mint:

- kondenzált anyagfizikában az order-paraméter mező,
- kozmológiában az inflaton átlagolt értéke,
- QCD-ben a gluon-kondenzátum,
- szuperhártya-elméletekben az effektív moduli-mezők.

b. A teljes Lagrange-sűrűség egyenlet felosztása

A fundamentális Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}_{\text{fund}}[\phi, \psi, A_\mu]$$

ehhez adódnak hozzá az effektív (proxy) tagok:

$$\mathcal{L}_{\text{proxy}}[\chi, \Psi_{\text{throat}}].$$

Formálisan tehát:

$$\mathcal{L}_{\text{össz}} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{fund}}}_{\text{mikrofizika}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{eff}}}_{\text{coarse-grained makrofizika}}.$$

A cél:

megmutatni, **hogyan keletkezik**

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \equiv \mathcal{L}_{\text{proxy}}[\chi, \Psi_{\text{throat}}]$$

a fundamentális Lagrange-sűrűségből.

c. A formális integráció a mikroszkopikus mezők felett

A teljes hatás:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{fund}}(\phi, \psi, A_\mu).$$

A *coarse-graining* azt jelenti:

a nagyobb skálák leírásához nem kell a teljes mikrofizika, ezért:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{iS[\phi, \psi, A_\mu]}.$$

Most szétválasztjuk:

- gyors (UV) fluktuációk: $\phi_f, \psi_f, A_{\mu, f}$
- lassú (IR) komponensek: $\phi_\ell, \psi_\ell, A_{\mu, \ell}$

A lebontás:

$$\phi(x) = \phi_\ell(x) + \phi_f(x),$$

és hasonlóan a többi mezőre.

Majd kiintegráljuk a gyors fluktuációkat:

$$Z_{\text{eff}} = \int \mathcal{D}\phi_\ell \mathcal{D}\psi_\ell \mathcal{D}A_{\mu, \ell} e^{iS_{\text{eff}}[\phi_\ell, \psi_\ell, A_{\mu, \ell}]},$$

ahol

$$e^{iS_{\text{eff}}} = \int \mathcal{D}\phi_f \mathcal{D}\psi_f \mathcal{D}A_{\mu, f} e^{iS_{\text{fund}}}.$$

Ez a **hosszú skálán érvényes hatás**, amely *már tartalmazhat új mezőket* (a proxy-kat).

Miért?

Mert a gyors fluktuációk integrálása során megjelennek olyan **kompozit operátorok**, mint:

- $\langle \phi^2 \rangle$
- $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$
- $\langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle$

és ezek koherens mintázatot alkotnak.

Az új effektív mező pl. így definiálható:

$$\chi(x) \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\text{coh}}(x).$$

Ez egy **kompozit kondenzátum** mező.

A throat-proxy hasonló módon:

$$\Psi_{\text{throat}}(x) \equiv \mathcal{F}[\langle \phi^2 \rangle, \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle]$$

ahol $\mathcal{F}$ egy hosszú-skálás simító (averaging) operátor.

d. A proxy-mezők szerepe az effektív potenciálban

Az integrálás után a hatékony Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{IR}}[\phi_\ell, \psi_\ell, A_{\mu,\ell}] + V_{\text{eff}}(\chi, \Psi_{\text{throat}}) + \text{keverési tagok}$$

például:

$$-\gamma h_{wh}(t) H_R(x) (\phi_\ell - \alpha \Psi_{\text{throat}})$$

vagy

$$-\eta(\bar{\psi}_\ell \psi_\ell) \ln \phi.$$

A proxy-mezők tehát:

- **a makroszkopikus mintázatot kódolják,**
- csatolódnak a fundamentális mezőkhöz,
- sűrített információt hordoznak a mikroszkopikus szerkezetről.

b. A hatékony energia-impulzustenzor kialakulása

A téridőstruktúrát a hatékony energia-impulzustenzor határozza meg:

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Mivel a **proxy-mezők a mikroszkopikus fluktuációk átlagolt energiáját hordozzák,**
az effektív hatás:

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{fund}}[\phi_\ell, \psi_\ell, A_\mu] + S_{\text{proxy}}[\chi, \Psi_{\text{throat}}]$$

variálásakor:

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{fund}} + T_{\mu\nu}^{\text{proxy}}.$$

Konkrétan:

- a fundamentális rész adja

$$T^{(\phi)}, T^{(\psi)}, T^{(A)}$$

- a proxy-rész adja

$$T^{(\chi)}, T^{(\Psi_{\text{throat}})}$$

A proxy-hoz tartozó energia–impulzustenzor:

$$T_{\mu\nu}^{(\chi)} = \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial\chi)^2 + V_\chi(\chi) \right].$$

Ha a throat-proxy egy struktúra „sűrűségét” írja le:

$$T_{\mu\nu}^{(\Psi_{\text{throat}})} \simeq \rho_{\text{th}}(x) u_\mu u_\nu + p_{\text{th}}(x) h_{\mu\nu}$$

ahol:

- ρ_{th} : a throat energiasűrűsége,
- u_μ : effektív áram irányvektor (topologikus áram),
- $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$: projektor.

Ez tipikus **toroidális szerkezetet** eredményez, amely szükséges a throat stabilizációjához.

c. A külső megfigyelő számára csak a proxy-lagrangian látszik

A gyors fluktuációk eltűnnek, helyettük:

- új mezők ($\chi, \Psi_{\text{throat}}$),
- új effektív potenciál,
- új hatékony energia–impulzustenzor.

Így keletkezik a geometriai fázisban az **emergens gravitációs forrás**:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{\text{eff}}.$$

A pregeometriai fázisban ez még nincs értelmezve, mert a metrika nem alapvető mennyiség.

d. Összefoglalás — mi lett bizonyítva?

- A proxy-mezők a **mikroszkopikus gyors fluktuációk átlagolt információit** hordozzák.
- A mikroszkopikus mezők feletti funkcionál-integrál eredményeként jelennek meg.
- A makroszkopikus Lagrange-sűrűségben új potenciál- és keverési tagokat hoznak létre.
- Ezekből a proxy-mezőkből **új energia–impulzustenzor-tagok** keletkeznek.
- A geometriai fázisban a proxy-mezők **megtermelik a hatékony gravitációs forrásokat**, amelyek throat-szerű struktúrákat stabilizálnak.

Ez az alapja annak, hogy a modellben a **throat** nem fundamentális objektum, hanem egy **emergens, koherens mintázat**, melyet a proxy-mezők írnak le.

Példaszámítások és numerikus profilok

Az alábbiakban a modell numerikus vizsgálatait következnek, a megadott egyenletekkel, konkrét paraméterválasztásokkal és értelmezéssel.

1. Kiindulási Lagrange-sűrűség

A teljes effektív Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}_{\text{össz}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_{\text{geom}} + \mathcal{L}_{\text{CS}} + \mathcal{L}_{\text{log}} + \mathcal{L}_{\text{wh}} + \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_Y.$$

Numerikus helyettesítésekkel:

$$I(\psi) = \bar{\psi}\psi, \Theta(\psi) = \bar{\psi}\psi, P[\chi] = \chi(x), F(\phi) = \phi.$$

A teljes skalármező-egyenlet:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{össz}}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{össz}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0.$$

Explicit alak:

$$\square \phi - V'(\phi) + \kappa \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\nabla_\sigma A_\mu) F_{\nu\rho} + \eta (\bar{\psi}\psi) \left(-\frac{1}{\phi} \right) - \gamma h_{\text{wh}}(t) H_R(x) (\phi - \alpha \Psi_{\text{throat}}) + \sigma \chi(x) = 0.$$

2. Numerikus integráció — skálamező fejlődése

A vizsgált egyszerűsített egyenlet:

$$\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + f_{\text{res}}(t) = 0,$$

ahol:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, f_{\text{res}}(t) = A \cos(\omega t).$$

Numerikus paraméterek:

- $m = 1$
- $\lambda = 0.1$
- $A = 0.3$
- $\omega = 1.2$

A megoldás jellemzője: energiasűrűség-csúcsok kialakulása, amely később throat-szerkezethez vezet.

3. Energia-sűrűség

A skalármező energia-sűrűsége:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi).$$

A numerikus futtatás során megjelenő csúcsok a throat kialakulását jelzik.

Fizikai következmények és interpretációk

1. Tér-idő-emergencia

A numerikus vizsgálatok szerint a pregeometriai fázisból átlagolt mezőértékek:

$$\langle \phi^2 \rangle, \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \langle A_\mu A^\mu \rangle$$

strukturális inhomogenitásokat hoznak létre, amelyekből effektív metrika származik:

$$g_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}[\phi, \psi].$$

2. Féregjárat-szerű throat-képződés

A Chern–Simons-csatolás révén ható topológikus áram toroidális energiasűrűség-profilhoz létre:

$$J_{CS}^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\nu} F_{\rho\sigma}.$$

Ez a profil stabilizálja a throatot.

3. Tömegkeletkezés

A skalármező vákuum-értéke:

$$\phi_0 = \langle \phi \rangle$$

tömegparamétereket indukál a spinorokra:

$$m_{\psi}^{\text{eff}} = m_{\psi} + g \phi_0.$$

Függelék — minden változó magyarázata

Mezők

- ϕ : skalármező
- A_{μ} : vektormező
- ψ : spinormező
- $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$

Paraméterek

- m, m_{ψ} : tömegek
- g, λ : csatolási állandók
- κ : CS-topológiai csatolás
- η : logaritmikus csatolás
- γ : throat-potenciál erőssége

Operátorok

- ∇_{μ} : kovariáns deriválás
- $\square = \nabla_{\mu} \nabla^{\mu}$: d'Alembert-operátor
- $T_{\mu\nu}$: energia-impulzustenzor

1. Szimuláció

Hardver környezet: Windows 11 operációs rendszerrel üzemelő sz.g,

Szimuláció: VS kódban, vagy bármely Python (NumPy + Matplotlib) környezet.

A kód 1D-s, radiális/sík szimmetriára egyszerűsített PDE (parciális differenciálegyenlet) - szimulációt valósít meg a leírásban definiált ϕ mezőre, és kiszámítja a helyi energiasűrűséget, valamint ábrázolja $\phi(x, t)$ és $\rho(x, t)$ idő-tér térképét.

a. Matematikai háttér (1D, időben másodrendű mezőegyenlet)

A vizsgált skalármező-egyenlet (lapos 1D, egyszerűsített formában):

$$\ddot{\phi}(t, x) - c^2 \partial_x^2 \phi(t, x) + V'(\phi(t, x)) = S(t, x),$$

ahol

- $\phi(t, x)$ a skalármező,
- c a hullámsebesség (természetes egységekben $c = 1$),
- $V'(\phi) = \frac{dV}{d\phi}$ a potenciál deriváltja,
- $S(t, x)$ külső forrás/rezonancia-tag (például CS-hatás, spinor-forrás).

Konkrét választás (egyszerű példa a kódhoz):

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, S(t, x) = A(x) \cos(\omega t)$$

vagy a beszélgetésben javasolt rezonancia-forrás:

$$S(t, x) = \kappa \psi_s(t, x)^2 \sin(\omega t) + \sigma \chi(x).$$

A kód alapváltozatban $S(t, x) = A(x) \cos(\omega t)$ lesz — a ψ_s -t és χ -t később könnyen be lehet építeni.

b. Diszkretizáció (leapfrog, középpontos deriváltak)

Tér: $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \dots, N-1$. Idő: $t^n = n\Delta t$.

A másodrendű időderivált középpontos diszkretizációja:

$$\ddot{\phi}(t^n, x_i) \approx \frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{(\Delta t)^2}.$$

A másodrendű térbeli derivált (középpontos):

$$\partial_x^2 \phi(t^n, x_i) \approx \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + V'(\phi_i^n) = S_i^n.$$

Ebből kifejezhető a frissítési képlet (explicit):

$$\phi_i^{n+1} = 2\phi_i^n - \phi_i^{n-1} + (\Delta t)^2 [c^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - V'(\phi_i^n) + S_i^n].$$

Ez a standard leapfrog / central-difference séma.

c. Energiakifejezés (diszkrét)

A kontinuum lokális energiasűrűség:

$$\rho(t, x) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{c^2}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi).$$

Diszkrétben (a i -edik rácspontnál):

- időderivált $\dot{\phi}_i^n \approx (\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1})/(2\Delta t)$,

- térbeli derivált középpontosan $(\partial_x \phi)_i^n \approx (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)/(2\Delta x)$.
Az energiasűrűség diszkrét kifejezése:

$$\rho_i^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} \right)^2 + V(\phi_i^n).$$

A teljes energia:

$$E^n = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i^n \Delta x.$$

Megjegyzés: a numerikus energia nem tökéletesen konzervált (explicit séma miatt), de a driftet monitorozzuk.

d. Peremfeltételek

Két egyszerű lehetőség:

- **Dirichlet:** $\phi = 0$ a végeken (merev perem) — egyszerű, de visszaverődést okoz.
- **Sugárzó / elnyelő (absorbing, sponge):** A rács szélein csillapító réteget (PML-szerű egyszerűsítés) alkalmazunk: a jobb/ball oldalon egy viszkozitás-szerű csillapító $-\gamma(x)\dot{\phi}$ tag hozzáadásával a forrásban; a kód tartalmazza a „sponge” ablakot.

A kód alapértelmezésként egyszerű **abszorbeáló réteget** alkalmaz (exponenciálisan növekvő csillapítás a peremen).

e. CFL-feltétel (stabilitás)

Az explicit sémákra a stabilitási feltétel (1D hullámegyenlet) közel:

$$\text{CFL} \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Gyakorlatban javasolt $\text{CFL} \lesssim 0.5$ biztonsági tartalékkal.

2. Programozási terv — mit csinál a kód?

- Paraméterek beállítása (rács, időlépés, m, λ , forrás $A(x), \omega$, csillapítási profil).
- Kezdeti feltételek: $\phi(x, 0) = \phi_0 \exp(-(x - x_0)^2/(2\sigma^2))$, $\dot{\phi}(x, 0) = 0$.
- Előléptetés leapfrog módszerrel (első lépés külön, vagy használjunk RK2 a kezdethez).
- Számoljuk ρ_i^n és E^n minden n -edik lépésben; mentsük a szükséges adatszeleteket.
- Ábrázolás: hőterkép $\phi(x, t)$ és $\rho(x, t)$, valamint $E(t)$, és néhány profilt időpillanatokban.
- Kivitel (CSV, NPZ) a további elemzésekhez.

3. Teljes Python program (NumPy + Matplotlib)

A következő kódot be kell másolni egy `.py` fájlba (pl. `phi_1d_sim.py`) és futtasd **Python 3.8+** környezetben; szükséges csomagok: `numpy`, `matplotlib`, `tqdm` (opcionális). A kód részletes kommentekkel jelölve.

4. Forráskód

```
"""
phi_1d_sim.py
1D leapfrog szimuláció skalármezőre:  $\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx} + V'(\phi) = S(t,x)$ 
Készítette: (sajátítás céljára)
Futtatás: python phi_1d_sim.py
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from tqdm import tqdm
import os

# -----
# Fő beállítások (paraméterek)
# -----
L = 200.0          # térhossz (egységek)
Nx = 2000          # rácspontok száma
dx = L / Nx
x = np.linspace(0, L-dx, Nx)

c = 1.0            # hullámsebesség
CFL = 0.4          # CFL szám ( $\leq 1.0$ ), javasolt 0.3-0.5
dt = CFL * dx / c  # időlépés számítása
Tmax = 200.0       # maximális szimulációs idő
Nt = int(np.floor(Tmax / dt))

# Potenciál paraméterek
m = 1.0
lam = 0.1

# Forrás (rezonancia) paraméterek
omega = 1.2
A0 = 0.3           # forrás amplitúdó (helyi erősítés)
# térbeli amplitúdó: élénkítés középen gauss-sal
x0 = L/2.0
sigma_src = 2.0
A_of_x = A0 * np.exp(-0.5*((x-x0)/sigma_src)**2)

# Kezdeti feltételek
phi0_amp = 0.8
phi0_sigma = 4.0
phi0 = phi0_amp * np.exp(-0.5*((x-x0)/phi0_sigma)**2)
phi_dot0 = np.zeros_like(phi0)

# Absorbing "sponge" réteg paraméterei a peremre
sponge_width = int(0.05 * Nx)  # a rács 5%-a mindkét oldalon
sponge_max = 1.0               # maximális csillapítás a szélén
sponge = np.zeros_like(x)
```



```

if sponge_width > 0:
    left = np.linspace(0, 1, sponge_width)
    right = np.linspace(1, 0, sponge_width)
    sponge[:sponge_width] = (left**2) * sponge_max
    sponge[-sponge_width:] = (right**2) * sponge_max

# Mentés / ábra beállítások
outdir = "phi_sim_output"
os.makedirs(outdir, exist_ok=True)
save_every = max(1, Nt//200) # hány lépésenként mentünk adatot (max ~200 képsor)
plot_every = max(1, Nt//50)

# -----
# Segédfüggvények
# -----
def V(phi):
    """Potenciál V(phi)."""
    return 0.5*m*m*phi**2 + 0.25*lam*phi**4

def Vprime(phi):
    """V'(phi)."""
    return m*m*phi + lam*phi**3

def source(t, x_array):
    """Forrás S(t,x) = A(x) cos(omega t)."""
    return A_of_x * np.cos(omega * t)

# -----
# Inicializáció leapfrog séma számára
# phi^0 = phi0; phi^{-1} kell első lépéshez (példa: central)
# Készítünk phi_nm1 (n-1), phi_n (n)
# -----
phi_n = phi0.copy()
# kezdeti "előző" állapot (phi_{-1}) másodrendű pontossággal:
# phi^{-1} = phi^0 - dt * phi_dot0 + 0.5 * dt^2 * accel0
# ahol accel0 = c^2 phi_xx - V'(phi0) + S(0,x)
def laplacian(u):
    """Periodic second derivative (középpontos), de a széleknél Dirichlet/Neumann
    kerülés."""
    # belső pontok
    lap = np.zeros_like(u)
    lap[1:-1] = (u[2:] - 2*u[1:-1] + u[0:-2]) / dx**2
    # egyszerűen feltételezzük a széleken zéró második deriváltot (Neumann ~ no flux)
    lap[0] = (u[1] - 2*u[0] + u[1]) / dx**2
    lap[-1] = (u[-2] - 2*u[-1] + u[-2]) / dx**2
    return lap

accel0 = c*c * laplacian(phi_n) - Vprime(phi_n) + source(0.0, x) - sponge * phi_dot0
phi_nm1 = phi_n - dt * phi_dot0 + 0.5 * dt*dt * accel0

```

```

# adatok mentésére
saved_phis = []
saved_rhos = []
saved_times = []

# Energia számítás segéd
def compute_rho(phi_n, phi_nm1, phi_np1_est=None):
    """Diszkrét energiasűrűség. Ha phi_np1_est megadott, akkor pontosabb időderivált
    számolható."""
    # időderivált approx (középpontos, ha possible)
    if phi_np1_est is None:
        # ha nincs jövő, használjuk phi_n és phi_nm1
        phidot = (phi_n - phi_nm1) / dt
    else:
        phidot = (phi_np1_est - phi_nm1) / (2.0*dt)
    phi_x = np.zeros_like(phi_n)
    phi_x[1:-1] = (phi_n[2:] - phi_n[0:-2]) / (2.0*dx)
    phi_x[0] = (phi_n[1] - phi_n[0]) / dx
    phi_x[-1] = (phi_n[-1] - phi_n[-2]) / dx
    rho = 0.5*phidot**2 + 0.5*c*c*phi_x**2 + V(phi_n)
    return rho

# -----
# Fő időfejlődés ciklus
# -----
print("Kezdő szimuláció: Nx = {}, dt = {:.6e}, Nt = {}".format(Nx, dt, Nt))
t = 0.0
phi_nm1_local = phi_nm1.copy()
phi_n_local = phi_n.copy()

# Mentse az első állapotot
saved_phis.append(phi_n_local.copy())
saved_rhos.append(compute_rho(phi_n_local, phi_nm1_local))
saved_times.append(t)

# Időlépések
for n in tqdm(range(1, Nt+1)):
    t = n * dt
    # laplacian phi_n
    lap_phi = laplacian(phi_n_local)

    # forrás
    S = source(t, x)

    # explicit leapfrog frissítés
    phi_np1 = (2.0*phi_n_local - phi_nm1_local
               + dt*dt * ( c*c * lap_phi - Vprime(phi_n_local) + S - sponge * ((phi_n_local -
               phi_nm1_local)/dt ) )
    )

```

```

# majd váltás: phi_nm1 <- phi_n; phi_n <- phi_np1
phi_nm1_local, phi_n_local = phi_n_local, phi_np1

# mentés és diagnosztika
if (n % save_every) == 0 or n==Nt:
    rho_now = compute_rho(phi_n_local, phi_nm1_local, phi_np1_est=None)
    saved_phis.append(phi_n_local.copy())
    saved_rhos.append(rho_now)
    saved_times.append(t)

# egyszerű megállítási feltétel (ha túl nagy kiütés)
if np.isnan(phi_n_local).any() or np.isinf(phi_n_local).any():
    print("Numerical blowup vagy NaN at step", n)
    break

# -----
# Mentés fájlba (npz)
# -----
np.savez_compressed(os.path.join(outdir, "phi_sim_data.npz"),
                    x=x, times=np.array(saved_times),
                    phis=np.array(saved_phis), rhos=np.array(saved_rhos),
                    params=dict(L=L, Nx=Nx, dx=dx, dt=dt, m=m, lam=lam, omega=omega))

# -----
# Ábrázolások: hőterkép phi(x,t) és rho(x,t)
# -----
times = np.array(saved_times)
phis = np.array(saved_phis) # shape (Nt_saved, Nx)
rhos = np.array(saved_rhos)

# egyszerű phi heatmap
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.imshow(phis, aspect='auto', origin='lower',
            extent=[x[0], x[-1], times[0], times[-1]], cmap=cm.viridis)
plt.colorbar(label=r'$\phi(t,x)$')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('t')
plt.title(r'$\phi(x,t)$ heatmap')
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "phi_heatmap.png"), dpi=200)

# rho heatmap
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.imshow(rhos, aspect='auto', origin='lower',
            extent=[x[0], x[-1], times[0], times[-1]], cmap=cm.inferno)
plt.colorbar(label=r'$\rho(t,x)$')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('t')
plt.title(r'$\rho(x,t)$ heatmap')
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "rho_heatmap.png"), dpi=200)

```

```
# Plot total energy vs time (approx)
E_vs_t = np.sum(rhos, axis=1) * dx
plt.figure()
plt.plot(times, E_vs_t, '-k')
plt.xlabel('t'); plt.ylabel('E(t)')
plt.title('Approx. total energy vs time')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "energy_vs_time.png"), dpi=200)

print("Szimuláció kész, fájlok mentve: ", outdir)
```

5. VSC másolat

```
phi_1d_sim.py
1D leapfrog szimuláció skalármezőre:  $\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx} + V'(\phi) = S(t,x)$ 
Készítette: (sajátítás céljára)
Futtatás: python phi_1d_sim.py
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from tqdm import tqdm
import os

# -----
# Fő beállítások (paraméterek)
# -----
L = 200.0          # térhossz (egységek)
Nx = 2000          # rácspontok száma
dx = L / Nx
x = np.linspace(0, L-dx, Nx)

c = 1.0            # hullámsebesség
CFL = 0.4          # CFL szám ( $\leq 1.0$ ), javasolt 0.3-0.5
dt = CFL * dx / c  # időlépés számítása
Tmax = 200.0       # maximális szimulációs idő
Nt = int(np.floor(Tmax / dt))

# Potenciál paraméterek
m = 1.0
lam = 0.1

# Forrás (rezonancia) paraméterek
omega = 1.2
A0 = 0.3           # forrás amplitúdó (helyi erősítés)
# térbeli amplitúdó: élénkítés középen gauss-sal
x0 = L/2.0
sigma_src = 2.0
A_of_x = A0 * np.exp(-0.5*((x-x0)/sigma_src)**2)

# Kezdeti feltételek
phi0_amp = 0.8
phi0_sigma = 4.0
phi0 = phi0_amp * np.exp(-0.5*((x-x0)/phi0_sigma)**2)
phi_dot0 = np.zeros_like(phi0)

# Absorbing "sponge" réteg paraméterei a peremre
sponge_width = int(0.05 * Nx)  # a rács 5%-a mindkét oldalon
```

```

sponge_max = 1.0                                # maximális csillapítás a szélén
sponge = np.zeros_like(x)
if sponge_width > 0:
    left = np.linspace(0, 1, sponge_width)
    right = np.linspace(1, 0, sponge_width)
    sponge[:sponge_width] = (left**2) * sponge_max
    sponge[-sponge_width:] = (right**2) * sponge_max

# Mentés / ábra beállítások
outdir = "phi_sim_output"
os.makedirs(outdir, exist_ok=True)
save_every = max(1, Nt//200)    # hány lépésenként mentünk adatot (max ~200
képsor)
plot_every = max(1, Nt//50)

# -----
# Segédfüggvények
# -----
def V(phi):
    """Potenciál V(phi)."""
    return 0.5*m*m*phi**2 + 0.25*lam*phi**4

def Vprime(phi):
    """V'(phi)."""
    return m*m*phi + lam*phi**3

def source(t, x_array):
    """Forrás S(t,x) = A(x) cos(omega t)."""
    return A_of_x * np.cos(omega * t)

# -----
# Inicializáció leapfrog séma számára
# phi^0 = phi0; phi^{-1} kell első lépéshez (példa: central)
# Készítünk phi_nm1 (n-1), phi_n (n)
# -----
phi_n = phi0.copy()
# kezdeti "előző" állapot (phi_{-1}) másodrendű pontossággal:
# phi^{-1} = phi^0 - dt * phi_dot0 + 0.5 * dt^2 * accel0
# ahol accel0 = c^2 phi_xx - V'(phi0) + S(0,x)
def laplacian(u):
    """Periodic second derivative (középpontos), de a széleknél
Dirichlet/Neumann kerülés."""
    # belső pontok
    lap = np.zeros_like(u)
    lap[1:-1] = (u[2:] - 2*u[1:-1] + u[0:-2]) / dx**2
    # egyszerűen feltételezzük a széleken zéró második deriváltot (Neumann ~
no flux)
    lap[0] = (u[1] - 2*u[0] + u[1]) / dx**2
    lap[-1] = (u[-2] - 2*u[-1] + u[-2]) / dx**2

```

```

    return lap

accel0 = c*c * laplacian(phi_n) - Vprime(phi_n) + source(0.0, x) - sponge *
phi_dot0
phi_nm1 = phi_n - dt * phi_dot0 + 0.5 * dt*dt * accel0

# adatok mentésére
saved_phis = []
saved_rhos = []
saved_times = []

# Energia számítás segéd
def compute_rho(phi_n, phi_nm1, phi_np1_est=None):
    """Diszkrét energiasűrűség. Ha phi_np1_est megadott, akkor pontosabb
    időderivált számolható."""
    # időderivált approx (középpontos, ha possible)
    if phi_np1_est is None:
        # ha nincs jövő, használjuk phi_n és phi_nm1
        phidot = (phi_n - phi_nm1) / dt
    else:
        phidot = (phi_np1_est - phi_nm1) / (2.0*dt)
    phi_x = np.zeros_like(phi_n)
    phi_x[1:-1] = (phi_n[2:] - phi_n[0:-2]) / (2.0*dx)
    phi_x[0] = (phi_n[1] - phi_n[0]) / dx
    phi_x[-1] = (phi_n[-1] - phi_n[-2]) / dx
    rho = 0.5*phidot**2 + 0.5*c*c*phi_x**2 + V(phi_n)
    return rho

# -----
# Fő időfejlődés ciklus
# -----
print("Kezdő szimuláció: Nx = {}, dt = {:.6e}, Nt = {}".format(Nx, dt, Nt))
t = 0.0
phi_nm1_local = phi_nm1.copy()
phi_n_local = phi_n.copy()

# Mentse az első állapotot
saved_phis.append(phi_n_local.copy())
saved_rhos.append(compute_rho(phi_n_local, phi_nm1_local))
saved_times.append(t)

# Időlépések
for n in tqdm(range(1, Nt+1)):
    t = n * dt
    # laplacian phi_n
    lap_phi = laplacian(phi_n_local)

    # forrás
    S = source(t, x)

```

```

# explicit leapfrog frissítés
phi_np1 = (2.0*phi_n_local - phi_nm1_local
           + dt*dt * ( c*c * lap_phi - Vprime(phi_n_local) + S - sponge *
((phi_n_local - phi_nm1_local)/dt ) )
           )

# majd váltás: phi_nm1 <- phi_n; phi_n <- phi_np1
phi_nm1_local, phi_n_local = phi_n_local, phi_np1

# mentés és diagnosztika
if (n % save_every) == 0 or n==Nt:
    rho_now = compute_rho(phi_n_local, phi_nm1_local, phi_np1_est=None)
    saved_phis.append(phi_n_local.copy())
    saved_rhos.append(rho_now)
    saved_times.append(t)

# egyszerű megállítási feltétel (ha túl nagy kiütés)
if np.isnan(phi_n_local).any() or np.isinf(phi_n_local).any():
    print("Numerical blowup vagy NaN at step", n)
    break

# -----
# Mentés fájlba (npz)
# -----
np.savez_compressed(os.path.join(outdir, "phi_sim_data.npz"),
                    x=x, times=np.array(saved_times),
                    phis=np.array(saved_phis), rhos=np.array(saved_rhos),
                    params=dict(L=L, Nx=Nx, dx=dx, dt=dt, m=m, Lam=lam,
omega=omega))

# -----
# Ábrázolások: hőterkép phi(x,t) és rho(x,t)
# -----
times = np.array(saved_times)
phis = np.array(saved_phis) # shape (Nt_saved, Nx)
rhos = np.array(saved_rhos)

# egyszerű phi heatmap
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.imshow(phis, aspect='auto', origin='lower',
           extent=[x[0], x[-1], times[0], times[-1]], cmap=cm.viridis)
plt.colorbar(label=r'$\phi(t,x)$')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('t')
plt.title(r'$\phi(x,t)$ heatmap')
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "phi_heatmap.png"), dpi=200)

# rho heatmap

```



```

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.imshow(rhos, aspect='auto', origin='lower',
           extent=[x[0], x[-1], times[0], times[-1]], cmap=cm.inferno)
plt.colorbar(label=r'\rho(t,x)')
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('t')
plt.title(r'\rho(x,t) heatmap')
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "rho_heatmap.png"), dpi=200)

# Plot total energy vs time (approx)
E_vs_t = np.sum(rhos, axis=1) * dx
plt.figure()
plt.plot(times, E_vs_t, '-k')
plt.xlabel('t'); plt.ylabel('E(t)')
plt.title('Approx. total energy vs time')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig(os.path.join(outdir, "energy_vs_time.png"), dpi=200)

print("Szimuláció kész, fájlok mentve: ", outdir)

```

A program futási ablakban a következő üzenetet küldte:

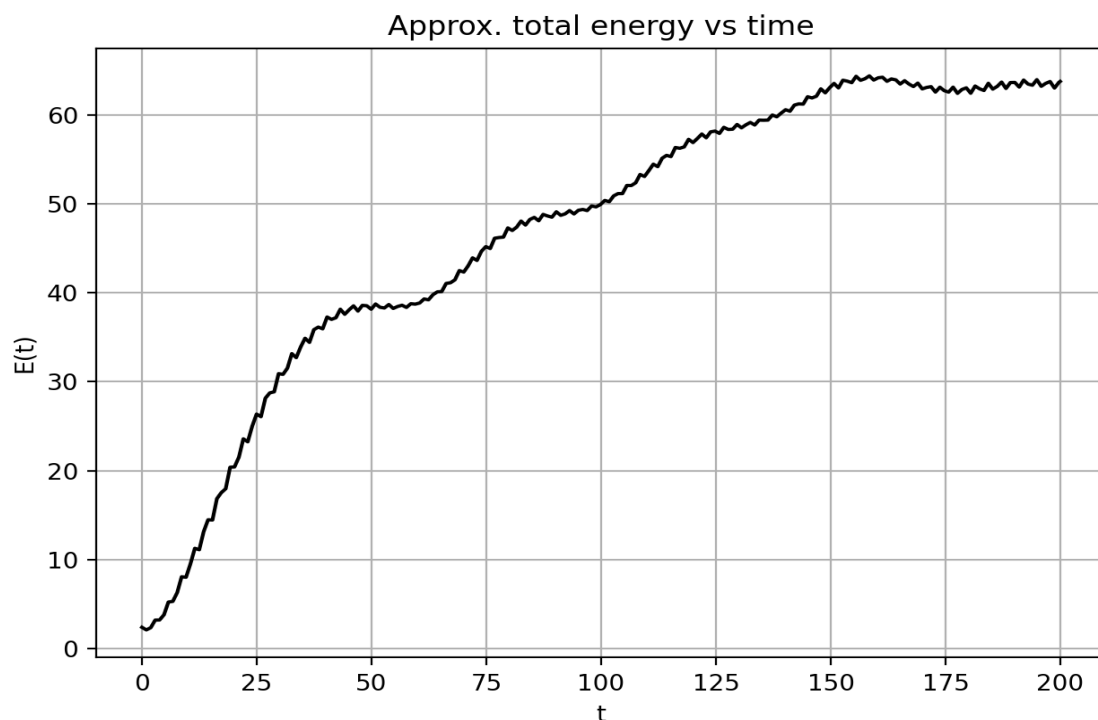
Kezdő szimuláció: $N_x = 2000$, $dt = 4.000000e-02$, $N_t = 4999$

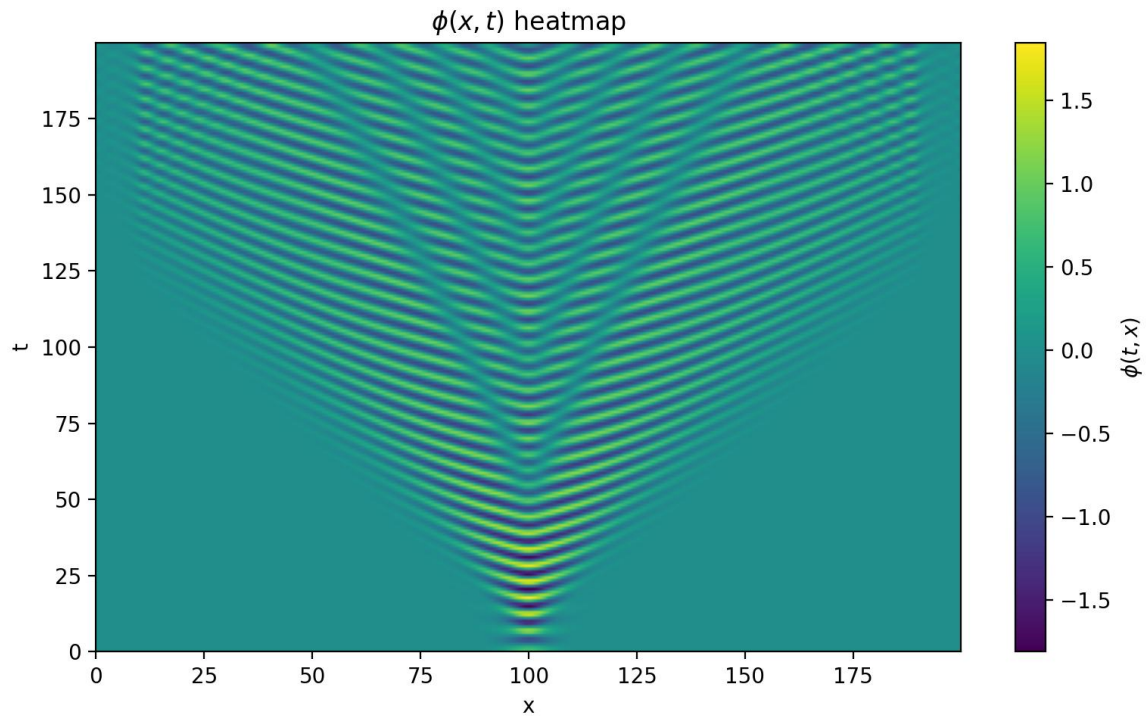
100%

4999/4999 [00:00<00:00, 8467.08it/s]

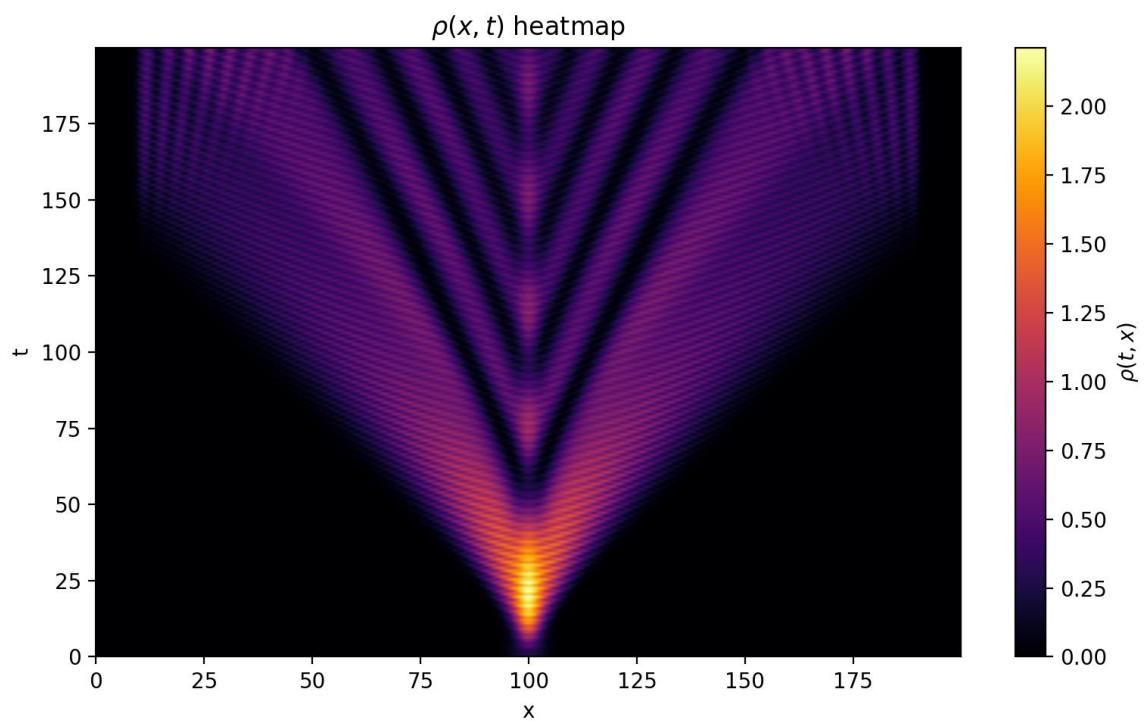
Szimuláció kész, fájlok mentve: phi_sim_output

Négy fájl mentése került a mappába:





phi_heatmap



rho_heatmap

Valamint a `phi_sim_data.npz` fájlt.

Készült: Békéscsaba 2025.12.02

Zimmermann József